PNI 2005 - PROBLEMA 1

λ: $\boldsymbol{x^2 = 4(x - y)}$ $\qquad$ r: $\boldsymbol{4y = x + 6}$

1)

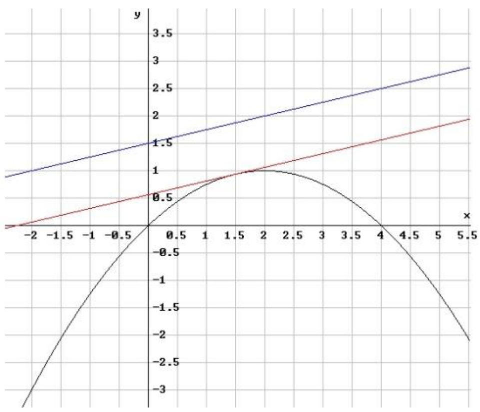
Dimostriamo che le due curve non hanno punti in comune.

$$\begin{cases} x^2 = 4(x - y) \\ 4y = x + 6 \end{cases}$$

Ricavando y dalla seconda equazione e sostituendola nella prima otteniamo l'equazione risolvente: $x^2 - 2x + 3 = 0$, che ha $\Delta < 0$ quindi il sistema non ammette soluzioni.

2)

Il punto P di λ che ha distanza minima da r è dato dal punto di tangenza a λ della retta parallela ad r.
Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento la parabola λ (in nero), la retta r (in blu) e la tangente a λ parallela ad r (in rosso).



La generica retta parallela ad r ha equazione:
$y = \frac{1}{4}x + k$
Imponiamo a tale retta di essere tangente alla parabola.

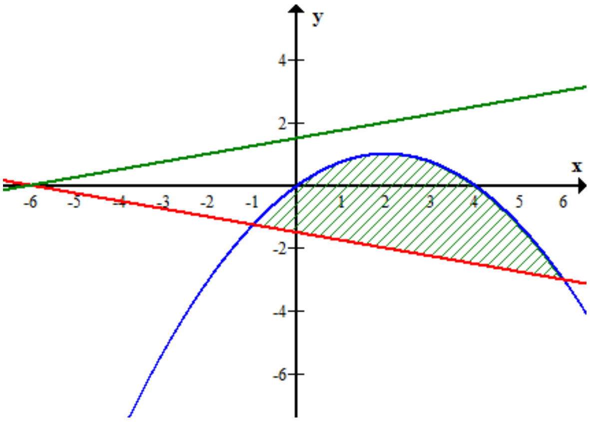
$$\begin{cases} x^2 = 4(x - y) \\ y = \frac{1}{4}x + k \end{cases}$$

Imponendo al Δ dell'equazione risolvente di essere uguale a zero otteniamo $k = \frac{9}{16}$. Quindi la tangente richiesta ha equazione $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{16}}$. Il punto di tangenza si ottiene intersecando tale retta con la parabola:

$\begin{cases} x^2 = 4(x - y) \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{16} \end{cases}$; questo sistema porta al punto P richiesto: $\boldsymbol{P = \left(\frac{3}{2}; \frac{15}{16}\right)}$.

3)

La retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x si ottiene dall'equazione di r scambiando y in – y, quindi ha equazione $s\colon\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$



Nella figura abbiamo rappresentato la parabola (in blu), la retta r (in verde) e la retta s (in rosso).
Le ascisse dei punti di intersezione tra s e la parabola sono **-1 e 6** (che si ottengono facilmente mettendo a sistema le equazioni delle due curve).

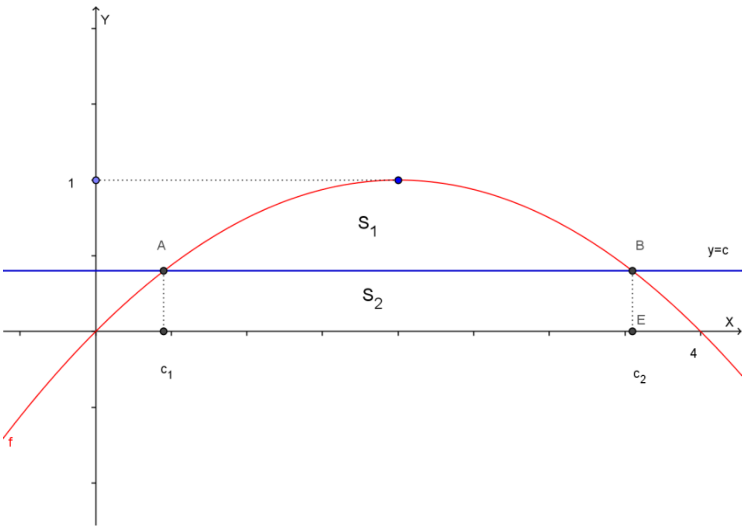
L'area richiesta si ottiene risolvendo il seguente integrale:

$$\boldsymbol{Area} = \int_{-1}^{6}\left(\left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right) - \left(-\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\right)\right)dx = \int_{-1}^{6}\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{5\,x^2}{8} + \frac{3\,x}{2}\right]_{-1}^{6} = \frac{\mathbf{343}}{\mathbf{24}} \cong \mathbf{14.29}\ \boldsymbol{u^2}$$

4)

Rappresentiamo graficamente la parabola con la generica retta di equazione **y = c.**



L'area di S, per il Teorema di Archimede è pari a:

$$\mathbf{Area}(\boldsymbol{S}) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}(\mathbf{4})(\mathbf{1}) = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{u^2}$$

Quindi dovrà essere:

$$\boldsymbol{S_1} = \boldsymbol{S_2} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Mettendo a sistema l'equazione della retta e della parabola troviamo le ascisse dei punti di intersezione:

$c_1 = 2 - 2\sqrt{1-c},$

$c_2 = 2 - 2\sqrt{1-c}$

(con c non superiore ad 1).

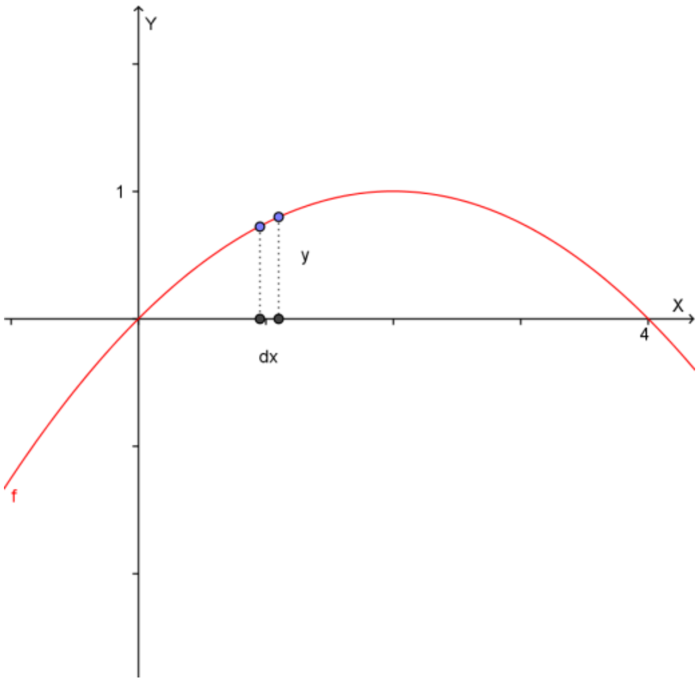
Calcoliamo ora la distanza tra i punti A e B;

$\overline{AB} = c_2 - c_1 = 4\sqrt{1-c}$

Applicando ancora il Teorema di Archimede otteniamo:

$\mathrm{Area}(\mathrm{S}_1) = \frac{2}{3}(\overline{AB})(1-c) = \frac{4}{3}$ da cui $\overline{AB}(1-c) = 2$; sostituendo ad $\overline{AB}$ il valore trovato prima, tenendo presente che 0<c<1, elevando al quadrato otteniamo la seguente equazione: $4(1-c)^3 = 1$, da cui $(1-c) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ed infine: $\boldsymbol{c = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cong 0.370}$

5)



L'elemento di volume dV è: $\boldsymbol{dV = y^2 dx}$ dove $\boldsymbol{y^2}$ rappresenta l'area del quadrato sezione.

Integrando da 0 a 4 otteniamo il volume richiesto:

$\boldsymbol{V} = \int_0^4 y^2\, dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right)^2 dx = \left[\frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \boldsymbol{\frac{32}{15} \cong 2.133\, u^3}$