PNI 2005 - PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione f definita nell'intervallo $[0; +\infty[$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(intendiamo log x come logaritmo naturale)

1)

Stabiliamo che f è continua e derivabile in x = 0.
La funzione è definita per $x \geq 0$, quindi si tratta di verificare la continuità e la derivabilità destra in x = 0.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, quindi la **funzione è continua**

(si osservi che $\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = 0$)

Per x>0 risulta $f'(x) = 2x\,(1 - \log x)$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$: quindi **la funzione è derivabile** in x=0 con derivata (destra) uguale a 0.

2)

Siccome f(0)=1>0 e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, per il **Teorema degli zeri** la funzione ha **almeno uno zero**; risulta poi :

$\boldsymbol{f'(x) = 2x\,(1 - \log x)} > 0 \; per \log x < 1, quindi \;\; per \; 0 < x < e$

Quindi la funzione cresce da 0 ad e, poi decresce, Siccome f(0)=1 ed f(e)>0, l'equazione f(x)=0 avrà **una sola radice per x>e.**

Cerchiamo ora un valore approssimato della radice con due cifre decimali esatte.
Notiamo che: f(2)>0, f(3)>0, f(4)>0, f(5)<0 quindi la **radice è compresa tra 4 e 5**.

Calcoliamo la derivata seconda della f(x): $\boldsymbol{f''(x) = -2\,\ln(x)}$<0 nell'intervallo [4; 5].
Applichiamo il metodo delle tangenti con punto iniziale $x_0 = 5$ (poiché $f(a) \cdot f''(x)$<0).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ponendo $x_0 = 5$ otteniamo successivamente:
$x_1 = 4{,}715 \quad x_2 = 4{,}6903 \quad x_3 = 4{,}6901$

Quindi la radice con due cifre decimali esatte è **x = 4,69**
(valore meglio approssimato x=4,69013…)

3)

Rappresentiamo graficamente la funzione f.

Abbiamo già detto che

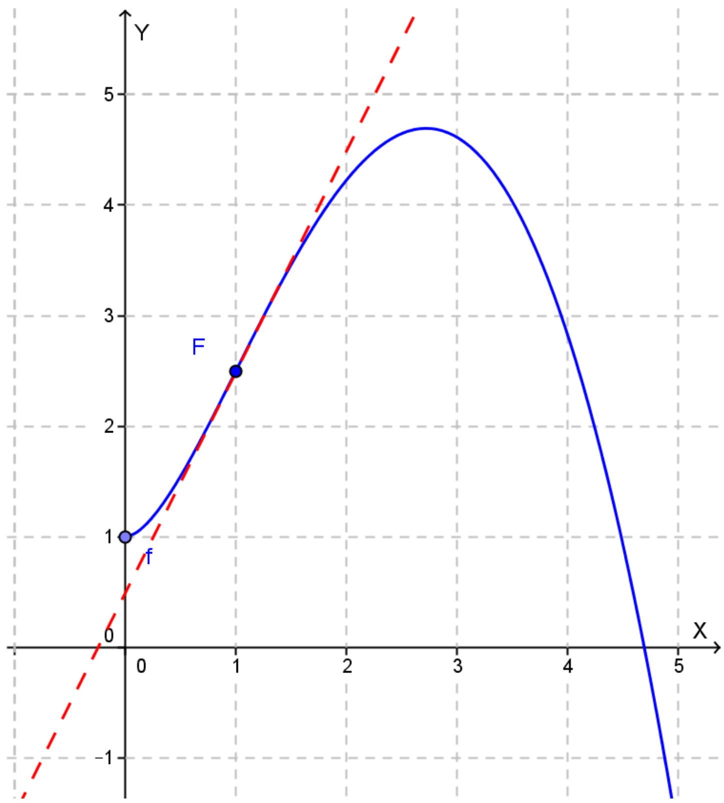
$\boldsymbol{f'(x) = 2x\,(1 - \log x)} > 0\; per \log x < 1, quindi\;\; per\; 0 < x < e$

Quindi x = e punto di massimo con $f(e) = \frac{1}{2}e^2 + 1 \cong 4{,}7$
$\boldsymbol{f''(x) = -2\,\ln(x)} \geq 0\; se\; 0 < x \leq 1$: quindi la funzione ha la concavità verso l'alto in tale intervallo, verso il basso se x>1, ed in x=1 ha un flesso (di ordinata 5/2).

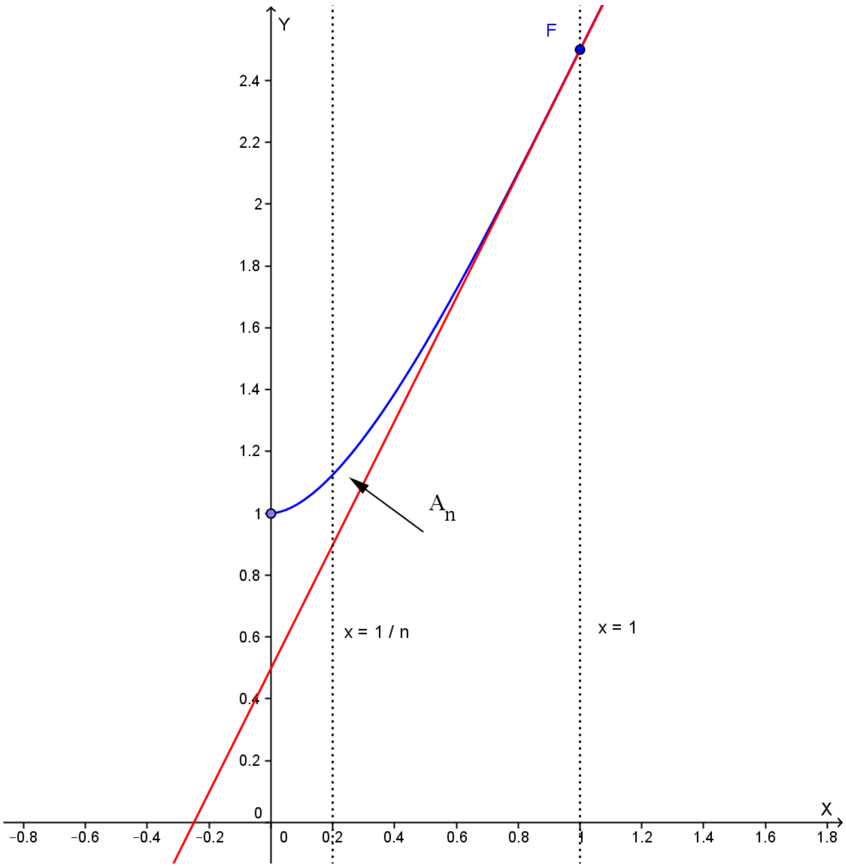
La richiesta tangente in x=1 (tangente inflessionale) ha coefficiente angolare:

f'(1)=2, quindi l'equazione è: $y - \frac{5}{2} = 2(x-1) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = 2x + \frac{1}{2}}$

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



4)



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente integrale definito:

$$\boldsymbol{A_n} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\left(\frac{1}{2} x^2 (3 - 2\log x) + 1 \right) - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x \right) dx = \left[-\frac{x^3 \ln(x)}{3} + \frac{11\, x^3}{18} - x^2 + \frac{x}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^{1} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} - \frac{log(n)}{3n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n}}$$

(Nota: l'integrale $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}$, integrando per parti)

5)

Il limite richiesto è = **1/9** e corrisponde all'area della regione delimitata dal grafico della funzione, dalla tangente di flesso e dalle rette x=0 e x=1 (N.B. se n tende a + infinito la retta x=1/n tende alla retta x=0).
In realtà il limite richiesto equivale all'integrale improprio:

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2} x^2 (3 - 2\log x) + 1 \right) - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx$$