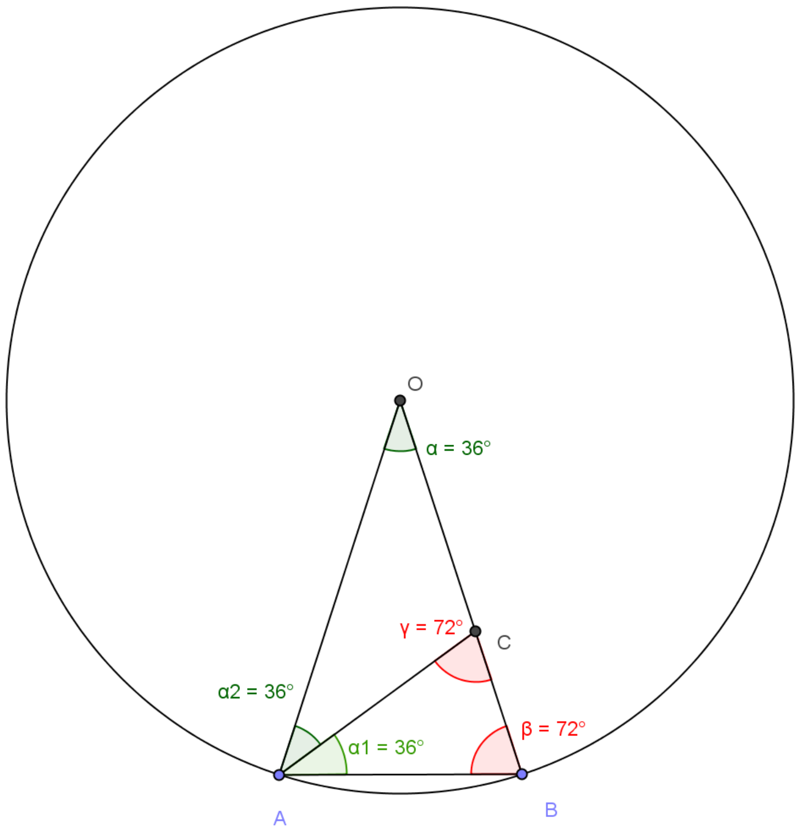
PNI 2005

QUESITO 1

Consideriamo il lato AB del decagono regolare inscritto nella circonferenza e indichiamo con AC la bisettrice dell'angolo alla base A. Essendo l'angolo in O di 36° (360°/10), gli angoli in figura sono facilmente ricavabili.



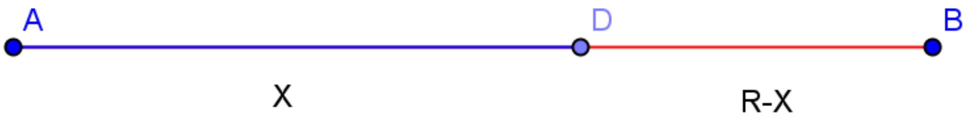
Ricordiamo che la sezione aurea di un segmento e *quella parte del segmento che è media proporzionale tra il segmento stesso e la parte rimanente*.
Dovremo quindi dimostrare che AB è la sezione aurea di OB, ed essendo AB=AC=OC basta dimostrare che OB:OC=OC:BC, cioè che OC^2=OB*BC.

Notiamo che i triangoli AOB e ABC sono simili, quindi risulta:

AB:AO=AO:AB, pertanto AB^2=BC*AO=BC*BO. Ma AB=AC=OC quindi:
OC^2=OB*BC c.v.d..

Vediamo ora come si può sfruttare il risultato precedente per calcolare sen 18° e sen 36°.

Cerchiamo prima la sezione aurea di un segmento lungo R.



La sezione aurea x si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x^2 = R(R - x)$$

Le soluzioni sono: $x = \frac{-R \pm \sqrt{5R^2}}{2}$, di cui quella accettabile è $\boldsymbol{R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$ che è la sezione aurea del segmento lungo R.

Per il teorema della corda (si veda la prima figura) risulta:

$\overline{AB} = 2R\, sen(18°) = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ da cui: $\boldsymbol{sen(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Calcoliamo ora il seno di 36°.

$sen(36°) = 2\, sen(18°) \cos(18°)$; $\cos(18°) = \sqrt{1 - sen^2(18°)} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, quindi:

$$\boldsymbol{sen(36°)} = 2\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

QUESITO 2

Una retta è tangente ad una curva in un punto P se ha con essa in P almeno due intersezioni coincidenti.
Posto $y = sen\, x$ intersecando con y=x troviamo **sen x =1**

$D(x\, sen\, x) = sen\, x + x\cos x = 1$ quando sen x =1 (dove cos x =0).

Quindi per sen x = 1 le curve di equazione y = x sen x e y = x si incontrano ed hanno tangente con lo stesso coefficiente angolare, quindi sono tangenti.

In modo analogo si procede con y = - x

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x\, sen\, x \end{cases} \Rightarrow sen\, x = -1$$

$D(x\, sen\, x) = sen\, x + x\cos x = -1$ quando sen x = - 1 (dove cos x =0).

Quindi per sen x = - 1 le curve di equazione y = x sen x e y = - x sono tangenti dove sen x = -1

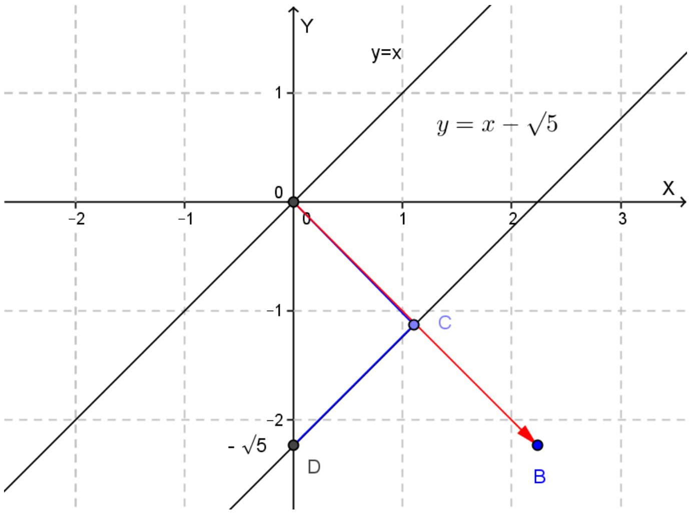
QUESITO 3

Consideriamo il vettore $\vec{\boldsymbol{v}} = (\sqrt{\mathbf{5}}; -\sqrt{\mathbf{5}})$

Una traslazione di vettore $\vec{\boldsymbol{v}}$ può ottenersi componendo due simmetrie assiali con assi paralleli tra di loro e perpendicolari al vettore $\vec{\boldsymbol{v}}$, prendendo la distanza tra i due assi uguale alla metà del modulo di $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Con il vettore $\vec{\boldsymbol{v}} = (\sqrt{\mathbf{5}}; -\sqrt{\mathbf{5}})$ due rette siffatte sono, per esempio,

$y = x \quad e \quad y = x - \sqrt{5}$ (vedi figura)



Sia φ la simmetria di asse y = x $\quad \varphi: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

e σ la simmetria di asse $y = x - \sqrt{5} \quad \sigma: \begin{cases} x' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases}$

Componiamo le due simmetrie:

$$\sigma \circ \varphi: (x, y) \underset{\varphi}{\rightarrow} (y, x) \underset{\sigma}{\rightarrow} (x + \sqrt{5}, y - \sqrt{5})$$

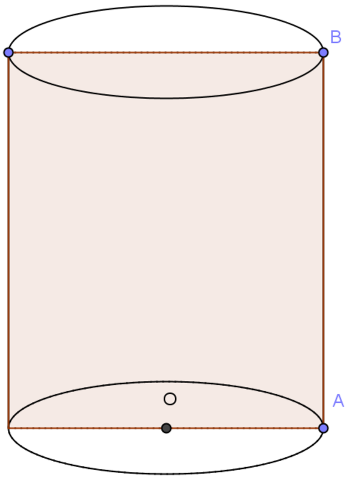
$$\varphi \circ \sigma: (x, y) \underset{\sigma}{\rightarrow} (y + \sqrt{5}, x - \sqrt{5}) \underset{\varphi}{\rightarrow} (x - \sqrt{5}, y + \sqrt{5})$$

$\sigma \circ \varphi$ è la traslazione di vettore $\vec{\boldsymbol{v}} = (\sqrt{\mathbf{5}}; -\sqrt{\mathbf{5}})$

$\varphi \circ \sigma$ è la traslazione di vettore $-\vec{\boldsymbol{v}} = (-\sqrt{\mathbf{5}}; \sqrt{\mathbf{5}})$, cioè l'opposta della precedente.

QUESITO 4

Si chiede di trovare la superficie totale minima di un cilindro circolare retto di dato volume.



Capacità lattina = 0,4 litri = 0,4 dm^3 = 400 cm^3.

$V = 400\ cm^3$

Risulta: $V = \pi \cdot \overline{OA}^2 \cdot \overline{AB}$
Poniamo $\boldsymbol{\overline{OA} = x}$ **(in cm) con x>0**

$$\overline{AB} = \frac{V}{\pi \cdot \overline{OA}^2} = \frac{400}{\pi \cdot x^2}$$

$$S_{TOT} = S_{LAT} + 2S_{BASE}$$

$$S_{TOT} = 2\pi x \cdot \frac{400}{x^2} + 2\pi x^2 = \frac{800}{x} + 2\pi x^2$$

$$S'_{TOT} = -\frac{800}{x^2} + 4\pi x = \frac{4\pi x^3 - 800}{x^2}$$

$S'_{TOT} = 0$ se $x^3 = \frac{200}{\pi}$ da cui $\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{200}{\pi}}}$

$S'_{TOT} > 0$ se $\boldsymbol{x} > \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{200}{\pi}}}$

Quindi la funzione S_{TOT} (continua e derivabile per x>0), è crescente per $\boldsymbol{x} > \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{200}{\pi}}}$

Decrescente per $\boldsymbol{0 < x <} \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{200}{\pi}}}$, perciò ha un minimo assoluto in $\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{200}{\pi}}}$.

Per tale valore di x risulta

$\boldsymbol{\overline{AB} = \frac{400}{\pi \cdot x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} = 2\overline{OA}}$

Si tratta quindi del cilindro equilatero: *tra tutti i cilindri circolari retti di dato volume quello equilatero ha superficie totale minima.*

Si ha : $\boldsymbol{\overline{OA}} \cong \boldsymbol{3,99}$ cm e $\boldsymbol{\overline{AB}} \cong \boldsymbol{7,99}$ cm

Con $x = \sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{200}{\pi}}}$ si ha la seguente superficie minima:

$$\boldsymbol{S_{TOT}} = \frac{800}{x} + 2\pi x^2 = \frac{800}{\sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{200}{\pi}}}} + 2\pi\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{200}{\pi}}}\right)^2 \cong \boldsymbol{300,53\ cm^2}$$

QUESITO 5

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

L'importanza principale di **"e"** (un numero trascendente le cui prime cifre decimali sono $\mathbf{2.718281828459}$) risiede nel fatto che è la base dei logaritmi naturali, detti "**neperiani**" dal suo fondatore **Nepero.**

Il valore di **e** a partire dal limite indicato è stato introdotto da **J. Bernoulli.**
La lettera **e** per indicare questa costante è stata introdotta da Eulero (ma non pare che l'abbia fatto perché iniziale del suo nome), inizialmente era indicata con la lettera **b**.

La presenza di **"e"** è molto diffusa in matematica e nelle scienze sperimentali.
Essa compare nella rappresentazione esponenziale dei numeri complessi:

$$a + ib = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\ sen\ \vartheta$$

Da questa espressione si ottiene (con $\rho = 1\ e\ \theta = \pi$) la celebre relazione di Eulero:

$$\boldsymbol{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

che contiene in una stessa formula i cinque simboli più diffusi della matematica:
$\boldsymbol{e, i, \pi, 1, 0}$.

La costante **e** compare per esempio nella distribuzione di Poisson e nella distribuzione di Gauss.

Un'altra importante legge in cui compare la costante **e** è la legge del decadimento radioattivo: $\boldsymbol{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$ (dove $\boldsymbol{N_0}$ è il numero dei nuclei all'istante t=0, $\boldsymbol{N(t)}$ è il numero dei nuclei non ancora decaduti al tempo t, $\lambda = \frac{1}{\tau}$, essendo τ la vita media dei nuclei.

Gli antichi greci sembra che usassero il valore di **e** come rapporto in alcune costruzioni architettoniche.

Per calcolare **"e"** con la precisione voluta si può ricorrere alla successione:

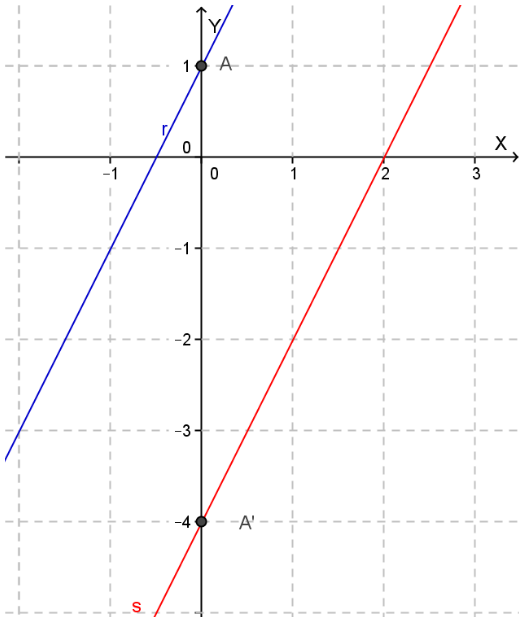
$$\boldsymbol{s_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

e trovare n in modo che : $\boldsymbol{s_{n+1} - s_n < E}$**,** essendo E l'errore dato. Tale metodo risulta poco efficace, poiché la successione in questione converge molto lentamente.
Per calcolare in modo più rapido un valore approssimato di **e** si può ricorrere allo sviluppo in serie: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, ponendo x=1.

QUESITO 6

$r: y = 1 + 2x \qquad s: y = 2x - 4$

Dobbiamo determinare le equazioni dell'omotetia σ di centro O in cui si corrispondono r ed s. Rappresentiamo graficamente le due rette.



Nell'omotetia di centro O richiesta si corrispondono A(0;1) ed A'(0;- 4), quindi il rapporto di omotetia è k = - 4. Le equazioni dell'omotetia sono quindi:

$$\sigma: \begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}$$

QUESITO 7

La definizione di **n!** (dove n è un numero naturale) è la seguente:
$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$ (per definizione si pone $\boldsymbol{0! = 1}$**).**
Esso indica le permutazioni senza ripetizioni di n oggetti, che sono le disposizioni senza ripetizioni di n oggetti ad n ad n.

Tra il fattoriale di un numero, il coefficiente binomiale, le disposizioni semplici e le combinazioni semplici ci sono le seguenti relazioni:

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} \quad \Longrightarrow \quad k! = \frac{D_{n,k}}{C_{n,k}}}$$

QUESITO 8

Consideriamo la curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = e^t + 2} \\ \boldsymbol{y = e^{-t} + 3} \end{cases}$$

Si chiede di trovare l'equazione della tangente alla curva nel punto **A(3; 4)**, che si ottiene per **t=0.**

$x'(t) = e^t \quad y'(t) = -e^{-t}$, quindi **y'(0)= -1**
La tangente in A ha quindi equazione: y – 4 = -1 (x – 3), cioè: $\boldsymbol{y = -x + 7}$

ALTRO MODO

Scriviamo l'equazione della curva in forma cartesiana:
essendo $\boldsymbol{e^t = x - 2}$, sostituendo nella seconda equazione otteniamo:

$$\boldsymbol{y = e^{-t} + 3 = \frac{1}{x-2} + 3}$$

Calcoliamo la derivata: $y' = -\frac{1}{(x-2)^2}$ da cui y'(3)= -1 …. come prima.

QUESITO 9

Il 10 si può ottenere in 3 modi: (6,4), (4,6) e (5,5). I casi possibili sono 6x6=36. Quindi la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi è $\boldsymbol{p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}}$.

La probabilità di ottenere 2(x) volte 10 in 6(n) lanci è data da;

$$p(n, x) = p(6,2) = \binom{6}{2} p^2 q^4$$

Dove p= 1/12 e q=1 – p = 11/12.

$$p(6,2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{73205}{995328}} \cong \boldsymbol{0.0735} \cong \boldsymbol{7.4}\,\%$$

La probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci è data da:

$$p(6, x \geq 2) = 1 - p(6,0) - p(6,1) = 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(\frac{11}{12}\right)^6 - \binom{6}{1} \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^5 =$$
$$= \boldsymbol{\frac{248117}{2985984}} \cong \boldsymbol{0.08309} \cong \boldsymbol{8.3\%}$$

QUESITO 10

Sia x l'età media della popolazione con meno di 60 anni: $0 \leq x < 60$ e y l'età media della popolazione con 60 o più anni; 30 è la media ponderata fra x (di **peso 0.6**) e y (di **peso 0.4**, poiché il 40% della popolazione ha 60 anni o più).

$\frac{x \cdot p_1 + y \cdot p_2}{p_1 + p_2} = \frac{x \cdot 0.6 + y \cdot 0.4}{1} = 30$ da cui $x = \frac{30 - 0.4 \cdot y}{0.6} = 50 - \frac{2}{3}y$

Ricordando la limitazione sulla x deve essere:

$0 \leq 50 - \frac{2}{3}y < 60$ che vuol dire:

$$\begin{cases} 50 - \frac{2}{3}y \geq 0 \\ 50 - \frac{2}{3}y < 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 75 \\ y > -15 \end{cases}$$

Quindi l'età media può essere 30 anni purché l'età media y degli abitanti con 60 o più anni non superi i 75 anni è l'età media x di quelli che hanno meno di 60 anni si pari a $50 - \frac{2}{3}y$.

Per esempio con y = 66 anni abbiamo x = 6 anni: cioè l'età media della popolazione è 30 anni se l'età media di quelli che hanno 60 o più anni è 66 e l'età media di quelli che hanno meno di 60 anni è 6.