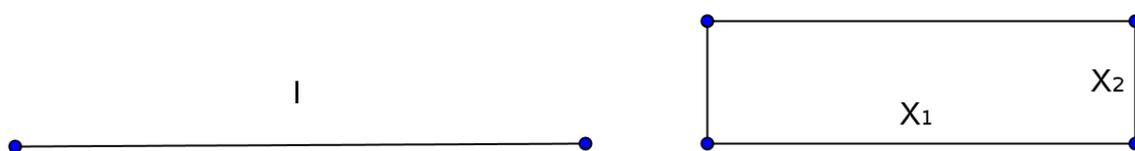


PNI 2006 - PROBLEMA 1

a)

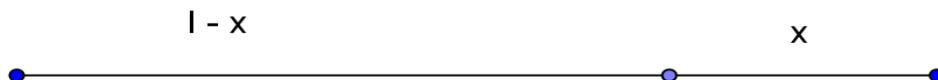


$$2p(\text{aiuola}) = l = \text{costante} \quad x_1, x_2 > 0 \quad x_1 + x_2 = \frac{l}{2} = \text{costante}$$

$$x_1 \cdot x_2 \text{ massimo quando } x_1 = x_2 = l/4$$

L'aiuola di area massima è quadrata, di lato $l/4$.

b) c)



$$X = \text{lunghezza circonferenza} \quad l - X = \text{perimetro quadrato} \quad 0 < x < l$$

(escludo $x=0$, non ci sarebbe la circonferenza e $x = l$, non ci sarebbe il quadrato)

$$x = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{x}{2\pi}$$

$$\text{Area cerchio} = \pi \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$$

$$\text{Lato quadrato} = \frac{l-x}{4} \quad \text{Area quadrato} = \frac{(l-x)^2}{16}$$

$$\text{Somma aree} = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$$

PRIMO METODO

Posto $y = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$, si ha una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, che ha il

minimo nel vertice, la cui ascissa è $x_V = \frac{l/8}{1/(2\pi)+1/8} = \frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$ che soddisfa la condizione $0 < x < l$, quindi è accettabile.

Il **massimo** richiesto non esiste.

SECONDO METODO (con le derivate)

La derivata della funzione è: $y' = 2x \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16} \right) - \frac{l}{8} > 0$ per $x > \frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$ quindi la funzione è decrescente tra 0 e $\frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$, crescente tra $\frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$ ed l . La somma delle aree è quindi minima per $x = \frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$

N.B. Come già osservato il massimo non esiste nei limiti imposti all'incognita. Ponendo $0 \leq x \leq l$, cioè accettando la possibilità che l'aiuola possa essere solo quadrata o solo circolare, il massimo richiesto (come si evince dallo studio del segno della derivata prima) può essere in $x = 0$ oppure in $x = l$. Siccome $y(0) = \frac{l^2}{16}$ e $y(l) = \frac{l^2}{4\pi} > y(0)$, la somma delle aree è massima se $x = l$, cioè se c'è solo l'aiuola è circolare.

Consideriamo infine un'aiuola a forma di parallelepipedo rettangolo colma di terreno: si chiede in che percentuale deve aumentare il terreno se ciascuna delle dimensioni dell'aiuola aumenta del 10%.

Dette a , b e c le dimensioni iniziali del parallelepipedo, il suo volume risulta $V = abc$. Aumentando ogni dimensione del 10% si avrà $a' = a + \frac{1}{10}a = \frac{11}{10}a$, analogamente per le altre due dimensioni. Il nuovo volume sarà quindi $V' = \frac{11}{10}a \frac{11}{10}b \frac{11}{10}c = \left(\frac{11}{10}\right)^3 abc = 1,331V$. L'incremento del volume è: $\Delta V = V' - V = 0,331V$. Avremo quindi un aumento percentuale del volume pari a: $\frac{\Delta V}{V} \cdot 100 = 33,1\%$