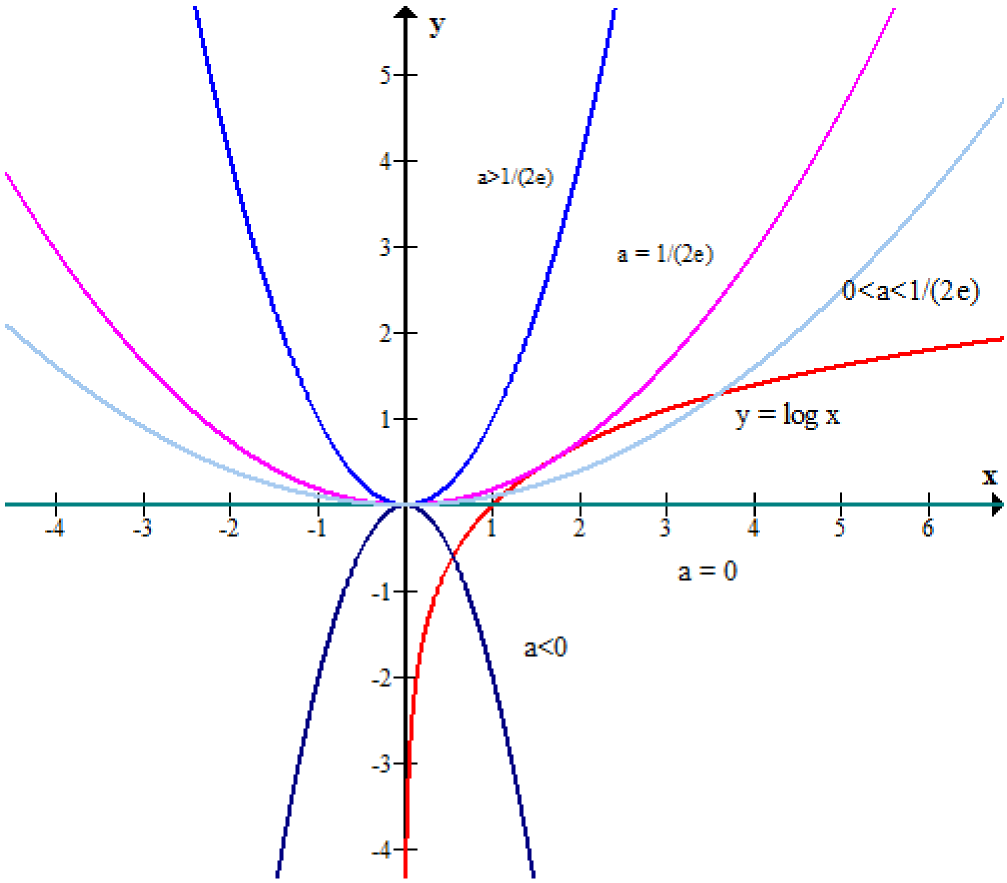
PNI 2006 - PROBLEMA 2

1.

$\mathrm{f(x)} = \log \mathrm{x}$, $g(x) = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$.

Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento la funzione logaritmica e la parabola generica (con a=0 abbiamo l'asse x, con a>0 parabole con vertice nell'origine e concavità verso l'alto, con a<0 concavità verso il basso).



Per discutere l'equazione $log\ x = ax^2$ cerchiamo la parabola tangente al logaritmo. Occorre risolvere il seguente sistema (x>0):

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ $\begin{cases} log\ x = ax^2 \\ \frac{1}{x} = 2ax \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2a}} \end{cases}$ sostituendo nella prima equazione troviamo

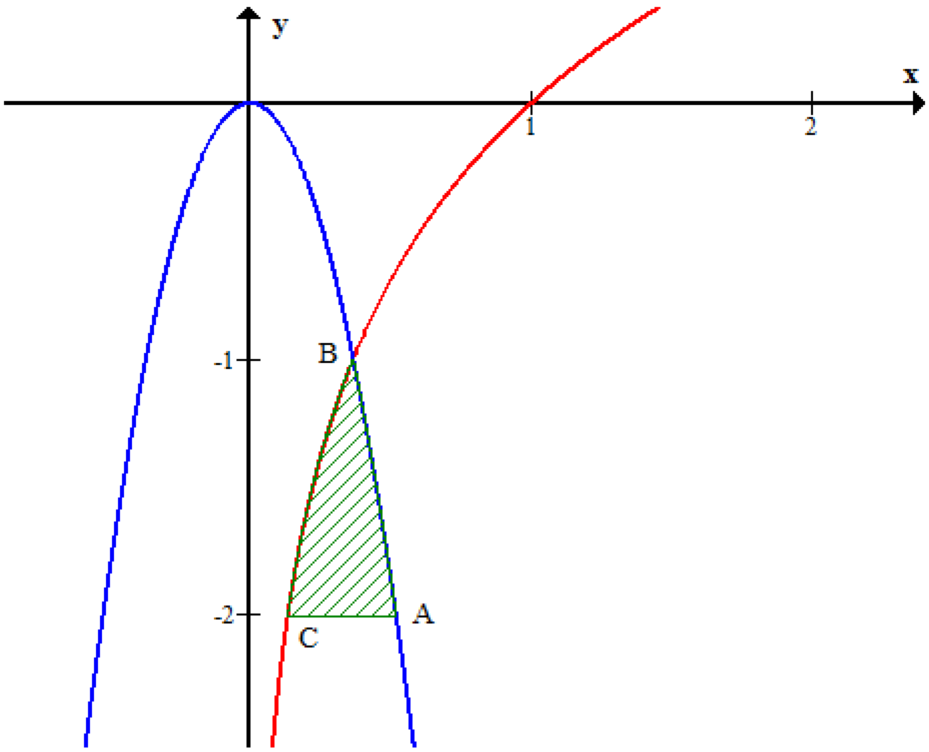
$\log \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2a}} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{a = \frac{1}{2e}}$ e con tale valore di a si trova $x = \sqrt{e}$

Quindi avremo:

- Se a<0: 1 soluzione : 0<x<1
- Se a=0: 1 soluzione (x=1)
- Se 0<a<1/(2e): 2 soluzioni distinte, $1 < x_1 < \sqrt{e}$, $x_2 > \sqrt{e}$
- Se a=1/(2e): 2 soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = \sqrt{e}$
- Se a>1/(2e): nessuna soluzione.

2.

Con $\boldsymbol{a = -e^2}$ abbiamo le funzioni: $\mathrm{f(x)} = \log \mathrm{x}$, $g(x) = -e^2\, x^2$, che rappresentiamo graficamente evidenziando parte di piano di cui si chiede l'area.



I punti A, B e C hanno rispettivamente coordinate:
$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{e};\ -2\right)$, $B = \left(\frac{1}{e};\ -1\right)$, $C = \left(\frac{1}{e^2};\ -2\right)$
Da $y = \log \mathrm{x}$ ricaviamo $x = e^y$
Da $y = -e^2\, x^2$, con x>0 otteniamo $x = \frac{1}{e}\sqrt{-y}$

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale definito:

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{e}\sqrt{-y} - e^y\right) dy = \cdots = \left[-e^y - \frac{2\,(-y)^{\frac{3}{2}}}{3\,e}\right]_{-2}^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{e^2} + \frac{4\,\sqrt{2}}{3\,e} - \frac{5}{3\,e} \cong 0{,}2159\ u^2}$$

3.

Dobbiamo studiare la funzione $\mathbf{h(x) = \log x - a}\boldsymbol{x^2}$ assegnando ad a un valore maggiore di 1/(2e). Scegliamo **a=1**. Quindi la funzione da studiare è: $\mathbf{h(x) = \log x - x^2}$

- Dominio: $0 < x < +\infty$
- Intersezioni con gli assi: nessuna (si riguardi il grafico del punto 1).
- Segno della funzione: $\mathbf{\log x - x^2 > 0, \log x > x^2}$: mai (si guardi sempre il grafico del punto 1).
- Limiti:

  $\lim_{x\to 0^+}(\log x - x^2) = -\infty$ (x=0 asintoto verticale)

  $\lim_{x\to +\infty}(\log x - x^2) = -\infty$ (x^2 è infinito di ordine superiore rispetto a log x)
- Eventuale asintoto obliquo: non esiste poiché h(x)/x tende a – infinito per x che tende a + infinito
- Studio della derivata prima: $\boldsymbol{y' = \frac{1}{x} - 2x}$. Il dominio della derivata prima coincide con il dominio della funzione.

  $y' = \frac{1}{x} - 2x = 0 \text{ se } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, che è nel dominio.

  $y' = \frac{1}{x} - 2x > 0\ ,\ 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$: quindi la funzione è crescente in tale intervallo e decrescente per $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. In $\mathbf{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ abbiamo un massimo relativo, che vale

  $$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{\log 2 + 1})$$
- Studio della derivata seconda: $\boldsymbol{y'' = -\frac{1}{x^2} - 2}$. La derivata seconda risulta sempre negativa nel dominio della funzione, quindi la concavità è sempre verso il basso.

- Il grafico della funzione è il seguente: