PNI 2006

QUESITO 1

La somma dei chicchi di grano è data da:

$$\boldsymbol{S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}}$$

Che la somma dei primi 64 termini della progressione geometrica di ragione 2 e primo termine 1. Tale somma vale:

$$\boldsymbol{S = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1}$$

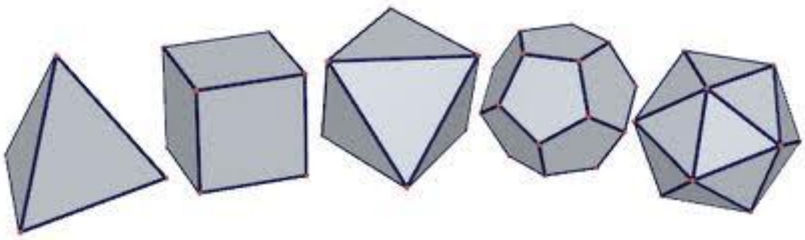
Se 1000 chicchi pesano 38 g, 1 chicco pesa $\frac{38}{1000}\, g = 0{,}038\, g$. Quindi il peso totale del grano è:

$$\boldsymbol{(2^{64} - 1) \cdot 0{,}038 \cdot 10^{-6}\ tonnellate \cong 701 \cdot 10^{9}\ tonnellate}$$

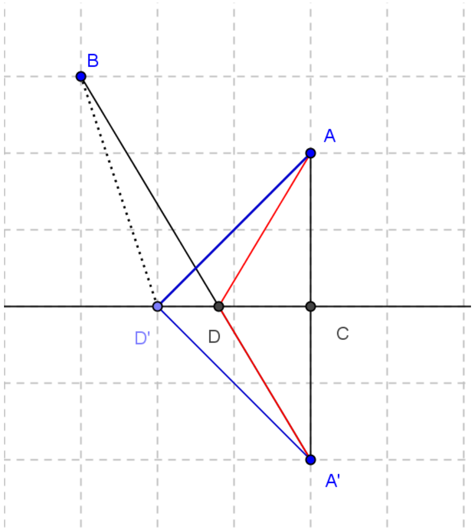
QUESITO 2

La somma delle facce di un angoloide è sempre minore di 360° e in ogni angoloide di un poliedro regolare le facce (che sono almeno tre) devono essere tutte uguali ad un angolo interno di un poligono regolare.
Si hanno quindi le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce de4gli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°: ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).



QUESITO 3



Il più breve cammino che congiunge A e B toccando la retta r è ADB, essendo A' il simmetrico di A rispetto ad r e D l'intersezione della retta A'B con r.

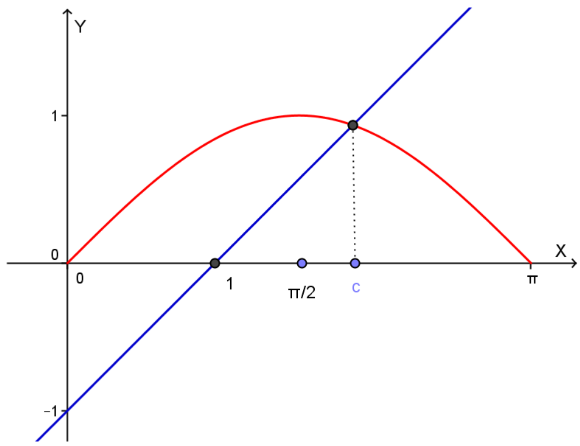
Infatti, per ogni altro punto D' di r risulta:

AD'+D'B=A'D'+D'B>A'B=A'D+DB=AD+DB

Quindi AD'+D'B>AD+DB

QUESITO 4

Rappresentando graficamente le funzioni **y = sen x** e **y = x – 1** si osserva che esiste una ed una sola soluzione c tale che: $\frac{\pi}{2} < c < \pi$.



Poiché sen(2)<1, possiamo dire che 1<c<2.
Applicando, per esempio, il metodo di bisezione alla funzione **f(x)=senx-x+1** si ottiene per c il valore approssimato **1.9<c<2.0** (una migliore approssimazione è c=1.93456).
[a;b]=[1;2]: f(1)=0.84>0; f(2)= - 0.09<0: 1<c<2
(a+b)/2=1.5; f(1.5)=0.50>0 come f(a), quindi: 1.5<c<2
(a+b)/2=(1.5+2)/2=1.75; f(1.75)= 0.23, quindi: 1.75<c<2
(a+b)/2=1.875; f(1.875)=0.08; quindi 1.875<c<2
(a+b)/2=1.9375; f(1.9375)= - 0.004; quindi 1.875<c<1.9375
(a+b)/2=1.91625; f(1.91625)= 0.02; quindi **1.91625<c<1.9375**
E così via …

QUESITO 5

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, con $n \in \mathbb{N}$.

La somma dei coefficienti è data da: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.

Posto a=b=1 risulta:

$$(1+1)^n = 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

QUESITO 6

$k \cos 2x - 5k + 2 = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad 15° < x < 45°$

Notiamo k deve essere diverso da zero, altrimenti avremmo 2=0.

$da\ 15° < x < 45°\ segue\ 30° < 2x < 90° \Longrightarrow 0 < \cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dall'equazione di partenza otteniamo: $\cos 2x = \frac{5k-2}{k} \Longrightarrow 0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Si tratta quindi risolvere il sistema:

$\begin{cases} \frac{5k-2}{k} > 0 \\ \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Eseguendo i calcoli si ottiene $\begin{cases} k < 0 \vee k > \frac{2}{5} \\ 0 < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}} \end{cases}$ le cui soluzioni sono:

$\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$. L'equazione data ha quindi soluzioni (una) per questi valori di k.

N.B.

Allo stesso risultato si può pervenire studiando graficamente il sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = cos2x} \\ \boldsymbol{y = \frac{5k-2}{k}} \end{cases}$$

QUESITO 7

Bruno de Finetti è autore della cosiddetta "**concezione soggettiva**" della probabilità, secondo cui:

"la probabilità di un evento A è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di A".

Tale grado di fiducia può essere visto come il prezzo equo da pagare in un gioco in cui si vince l'importo unitario se la scommessa ha successo, e non si vince nulla in caso di insuccesso.
In questa concezione di de Finetti è implicita la critica al concetto classico di probabilità, intesa nel senso oggettivo di una misura

QUESITO 8

Indichiamo con A l'evento "fa centro": p(A)=p=0.5; q=p($\overline{A}$)=0.7
In n tiri la probabilità di fare almeno un centro è: $1-q^n=1-0.7^n$.
Tale probabilità è ≥ 0.99 se:

$1-0.7^n \geq 0.99 \;\Longrightarrow\; 0.7^n \leq 0.01 \;\Longrightarrow\; n\,log(0.7) \leq \log(0.01)$ da cui

$$\boldsymbol{n} \geq \frac{\mathbf{-2}}{\boldsymbol{log}(\mathbf{0.7})} \cong \mathbf{12.9}$$

Il minimo numero di tiri richiesto è quindi **13.**

QUESITO 9

La funzione f(x) è derivabile e non nulla in ogni punto del suo dominio; inoltre sappiamo che $f'(x)=f(x)\;ed\;f(0)=1$. Si chiede se sia possibile determinare la funzione.

L'unica funzione non nulla che coincide con la sua derivata è $f(x)=e^x$: questa funzione soddisfa tutte le condizioni richieste.

METODO DIRETTO

Dalle ipotesi segue che $\frac{f'(x)}{f(x)}=1$. Integrando otteniamo $\ln|f(x)|=x+k$ da cui ricaviamo

$|f(x)|=e^{x+k}=e^k e^x$, $f(x)=\pm e^k e^x=ce^x$ (avendo posto $c=\pm e^k$).

Da $f(x)=ce^x$, ponendo f(0)=1 troviamo c=1, quindi $\boldsymbol{f(x)=e^x}$.

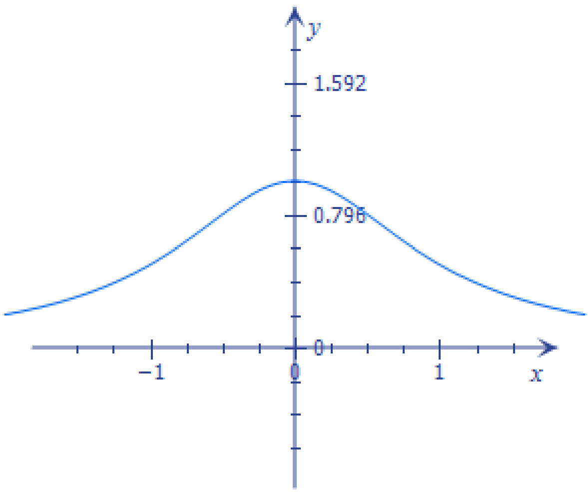
QUESITO 10

Calcoliamo un valore approssimato dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

usando (per esempio) il metodo dei rettangoli.

Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è il seguente:



Indichiamo con s_n la somma dei rettangoli inscritti con S_n la somma dei rettangoli circoscritti. La base di ciascuno dei rettangoli è data da (1-0)/n=1/n.

Si avranno le seguenti espressioni:

$$s_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

Per esempio con **n=5** si ha: $\boldsymbol{s_n \cong 0.734}$ **e** $\boldsymbol{S \cong 0.834}$.

Quindi: $s_n < \frac{\pi}{4} < S_n \;\Rightarrow 4 \cdot s_n < \pi < 4 \cdot s_n \;\Rightarrow \boldsymbol{2.94 < \pi < 3.34}$