PNI 2007 - PROBLEMA 1

1.

$a > 0, \quad a \neq 1$

$g(x) = a^x + a^{-x}$

Per studiare la monotonia della funzione studiamo la derivata prima:

$g'(x) = D(e^{x\ln a} + e^{-x\ln a}) = a^x \ln a - a^{-x} \ln a = \ln a(a^x - a^{-x})$

Risulta:

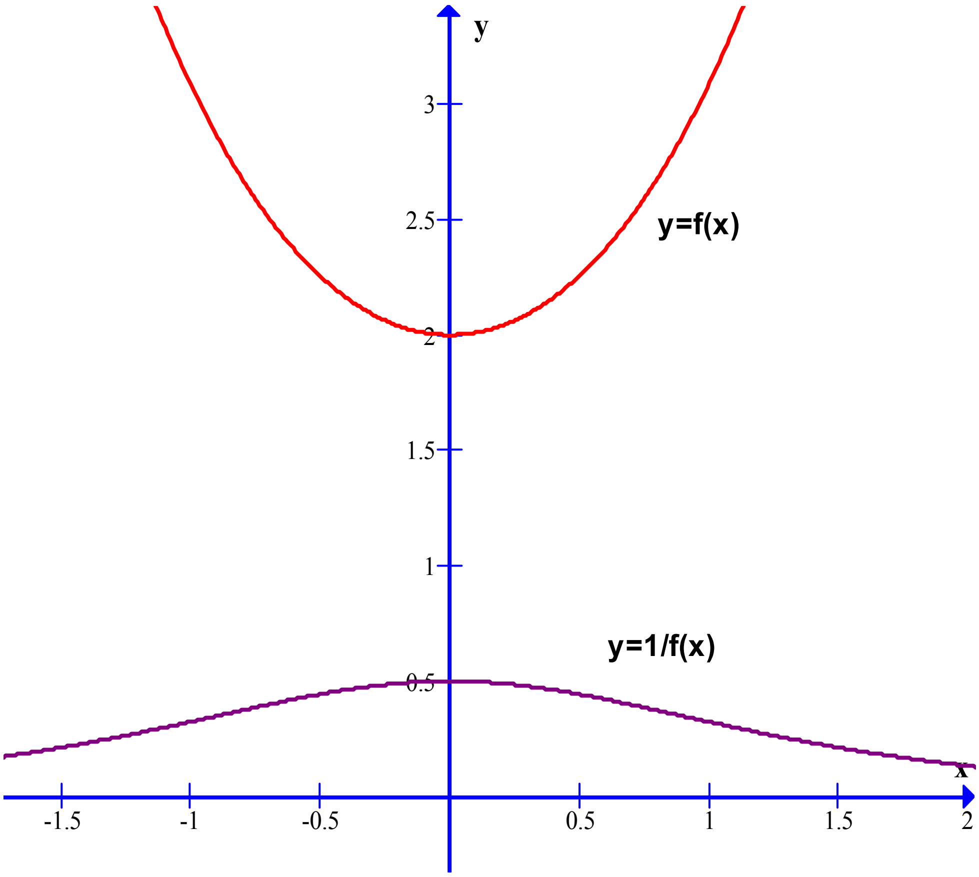
- se a>1, essendo ln a >0 la g'(x) è > 0, quindi g strettamente crescente se
  $a^x - a^{-x} > 0 \Rightarrow a^x > a^{-x} \Rightarrow x > -x \Rightarrow x > 0$
- se 0<a<1, essendo ln a<0, g'(x) è >0, quindi g strettamente crescente se
  $a^x - a^{-x} < 0 \Rightarrow a^x < a^{-x} \Rightarrow x > -x \Rightarrow x > 0$

2.

Poniamo **a = e** e studiamo la funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$

- La funzione è definita su tutto l'asse reale
- Se x = 0 y =2
- Con y=0 non ci sono intersezioni
- f(-x)=f(x): la funzione è pari
- I limiti sia al + infinito che al - infinito sono + infinito
- La funzione è crescente se x>o e decrescente se x<0 (come visto nel punto 1)
- La derivata prima è
  $f'(x) = e^x - e^{-x}$, che si annulla solo in x=0, dove c'è il minimo asoluto che vale 2
- La derivata seconda è $f''(x) = e^x + e^{-x} > 0$, quindi il grafico volge sempre la concavità verso l'alto
- Non ci sono asintoti

Il grafico della funzione f (x) è indicato nella pagina seguente, insieme al grafico della funzione reciproca 1 / f(x), ottenibile facilmente dal primo:



3.

Calcoliamo $\int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

Ponendo $e^x = z$ differenziando otteniamo $e^x dx = dz$; ad x=0 corrisponde z=1 e ad x=t corrisponde $z = e^t$.

L'integrale quindi diventa:

$$\int_1^{e^t} \frac{dz}{1+z^2} = [\operatorname{arctg} z]_1^{e^t} = \operatorname{arctg}(e^t) - \frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ quando } t \to +\infty$$

Il limite trovato rappresenta l'area della regione (illimitata) del primo quadrante compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse.

4.

Il valore $\frac{\pi}{4}$ trovato nel punto precdente può essere ottenuto, per esempio, mediante il calcolo numerico dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Si veda una soluzione mediante il metodo dei rettangoli nel Quesito 7 della Maturità PNI del 2003:

http://www.matefilia.it/maturita/spe2003/q_6-7.jpg