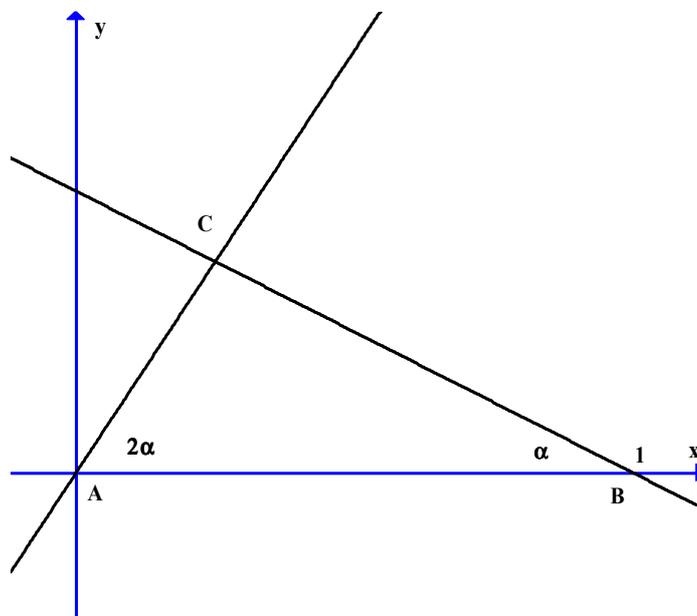


PNI 2007 - PROBLEMA 2

1.



Equazione della retta AC: $y = (\operatorname{tg}2\alpha)x$

Equazione della retta BC: $y = -(\operatorname{tg}\alpha)(x - 1)$

Ponendo $\operatorname{tg}\alpha = t$ risulta:

$$\text{Retta AC: } y = (\operatorname{tg}2\alpha)x = \frac{2t}{1-t^2}x$$

$$\text{Equazione della retta BC: } y = -(\operatorname{tg}\alpha)(x - 1) = -t(x - 1)$$

Ricavando t dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima si ottiene l'equazione del luogo richiesto:

$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0 \quad (*)$$

2.

Si tratta di un'iperbole traslata, di centro $(2/3; 0)$; effettuando la traslazione di assi:

$$x' = x - 2/3, \quad y' = y$$

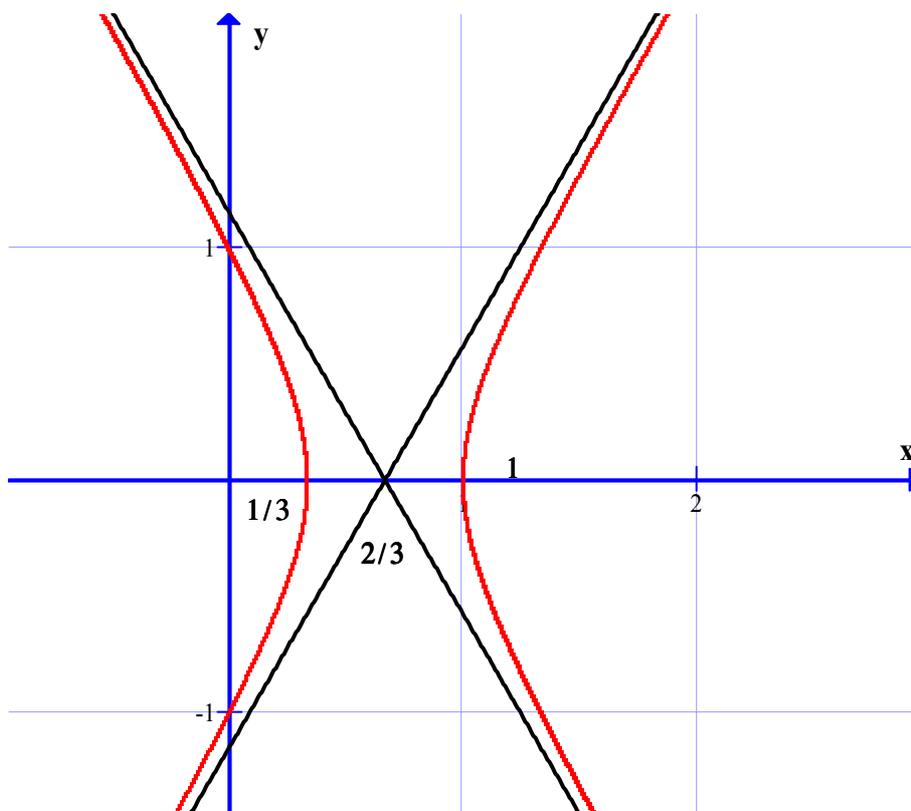
ossia

$$x = x' + 2/3, \quad y = y'$$

si ottiene la forma canonica (trascurando gli apici):

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \quad \text{da cui} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{3} \quad \text{e quindi gli asintoti} \quad y = \pm\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Il grafico di questa iperbole è:



Limitazioni geometriche:

$$0 < 3\alpha < \pi \Rightarrow 0 < \alpha < \pi/3$$

Con $\alpha = 0$ il punto C si trova nel punto dell'asse x di ascissa $1/3$; infatti, in generale, per il teorema dei seni, si ha:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha)} = \frac{1}{2\cos \alpha} \text{ che, per } \alpha \rightarrow 0, \text{ tende a } 1/2.$$

Pertanto $AC = (1/2)BC$, da cui $AC = 1/3$, essendo $AB = 1$.

Con $\alpha = \pi/3$ il punto C non si ottiene (le rette AC e BC sono parallele); pertanto le limitazioni dell'ascissa di C sono $x \leq 1/3$; il grafico del luogo richiesto è quindi il ramo sinistro dell'iperbole.

Notiamo esplicitamente che il vertice C del triangolo può essere in uno qualsiasi dei quattro quadranti.

Osservazione

Il grafico richiesto può essere ottenuto anche studiando la funzione di equazione

$$y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}, \text{ ottenuta dalla (*),}$$

e la sua simmetrica rispetto all'asse delle x; valgono le stesse considerazioni di prima sulle limitazioni geometriche.

3.

Utilizzando i teoremi di trigonometria sui triangoli rettangoli, si ha che:

l'altezza AH relativa al lato BC vale: $\overline{AH} = \overline{AB} \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$

L'altra altezza: $\overline{BK} = \overline{AB} \cdot \sin(2\alpha) = \sin(2\alpha)$

La somma dei quadrati di queste due altezze è:

$$z = \sin^2 \alpha + \sin^2(2\alpha) = \sin^2 \alpha (5 - 4\sin^2 \alpha)$$

Pongo $\sin \alpha = x$ e considero il triangolo nel primo quadrante (ciò non lede la generalità della questione); in questo modo x è positivo.

$$z = x^2(5 - 4x^2)$$

Con il metodo delle derivate si ottiene il massimo richiesto per

$$x = \sqrt{\frac{5}{8}}, \text{ cioè per } \sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{8}} \text{ da cui } \alpha \approx 52^\circ 14'.$$

Metodo sintetico

$$z = x^2(5 - 4x^2) = \frac{1}{4}(4x^2(5 - 4x^2))$$

z è massima se lo è $(4x^2(5 - 4x^2))$

Si tratta del prodotto di due quantità a somma costante: $4x^2 + (5 - 4x^2) = 5$ quindi è

massimo se le due quantità sono uguali: $4x^2 = 5 - 4x^2$ da cui $x^2 = \frac{5}{8}$ ossia $x = \sqrt{\frac{5}{8}}$, come trovato nel caso precedente.

4.

AC è la base di un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36° , quindi è la sezione

aurea del lato (che misura 1); la sua misura è quindi $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, come si ottiene risolvendo la proporzione:

$$1: x = x : (1 - x).$$

N.B.

Per la dimostrazione della proprietà suddetta si veda la soluzione su [matefilia](http://www.matefilia.it/maturita/ord2005/ord2005.shtml) del quesito 1 della maturità di ordinamento 2005: <http://www.matefilia.it/maturita/ord2005/ord2005.shtml>