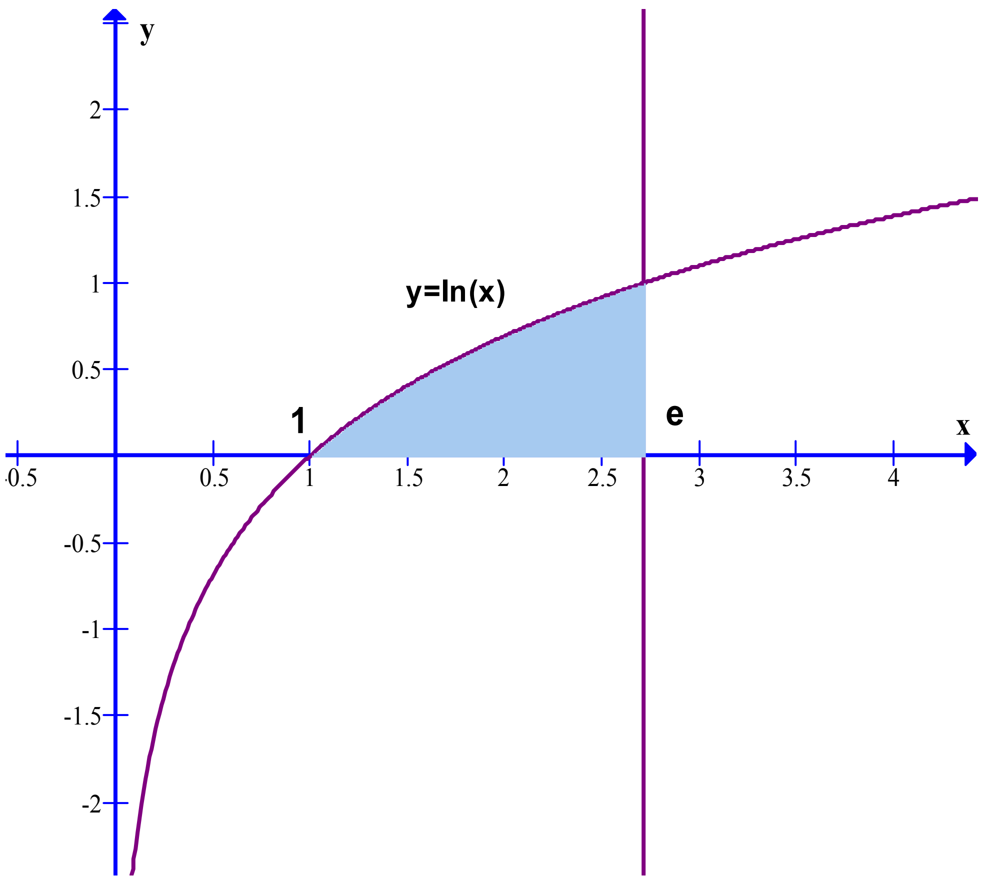
# PNI 2007

## QUESITO 1

Il problema della quadratura del cerchio consiste nella ricerca di un quadrato di area pari a quella del cerchio dato.
Si tratta di un problema classico, che si è dimostrato essere irrisolvibile per via elementare. Ciò equivale a dire che non è possibile costruire, usando solo riga e compasso, il lato del quadrato equivalente al cerchio.
Se per esempio prendiamo il cerchio di lato 1, la sua area è uguale a $\pi$, quindi il lato del quadrato equivalente è $\sqrt{\pi}$, che non può essere costruito per via elementare.
La dimostrazione dell'impossibilità di quadrare il cerchio (per via elementare) è una conseguenza del fatto che $\pi$ è un numero trascendente.

## QUESITO 2




Le sezioni date suddividono il solido in questione in solidi approssimabili con prismi aventi per base un rettangolo lati ln(x) e 3ln(x) e altezza dx.
Il volume di ognuno dei suddetti prismi può quindi essere espresso nella forma:

$dV = (3 \cdot \ln^2 x)dx$.

Il volume richiesto si ottiene sommando questi infiniti "volumetti", quindi integrando dV tra 1 e e:

$$V = \int_1^e dV = \int_1^e (3 \cdot \ln^2 x)dx$$

Integrando per parti si ottiene la primitiva

$$\int (3 \cdot \ln^2 x)dx = 3(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x)$$

Risulta quindi

$$V = \int_1^e (3 \cdot \ln^2 x)dx = 3\left[(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x)\right]_1^e = 3(e-2) \approx 2{,}15$$

(valore approssimato per difetto a meno di 1 centesimo).

## QUESITO 3

- Il prodotto di due omotetie aventi lo stesso centro è un'omotetia con lo stesso centro e rapporto di omotetia pari al prodotto dei due rapporti
- Ad ogni omotetia di rapporto k (ovviamente non nullo) corrisponde un'omotetia di rapporto 1/k, tale che il prodotto per la prima sia l'identità
- L'identità è una particolare omotetia
- Il prodotto di omotetie con lo stesso centro gode della proprietà associativa
- Il prodotto di omotetie è commutativo: quindi il gruppo è abeliano.

## QUESITO 4

Si tratta della funzione di distribuzione di probabilità detta gaussiana (o distribuzione normale). Essa è la distribuzione di probabilità di misure soggette ad errori casuali e permette di calcolare la probabilità che una variabile aleatoria continua assuma valori in un determinato intervallo:

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

- $\mu$ rappresenta il valor medio

- $\sigma$ è la deviazione standard; questo parametro dà informazioni sulla larghezza della gaussiana; più è piccolo, maggiore è il massimo della funzione, minore è quindi la dispersione dei valori rispetto alla media

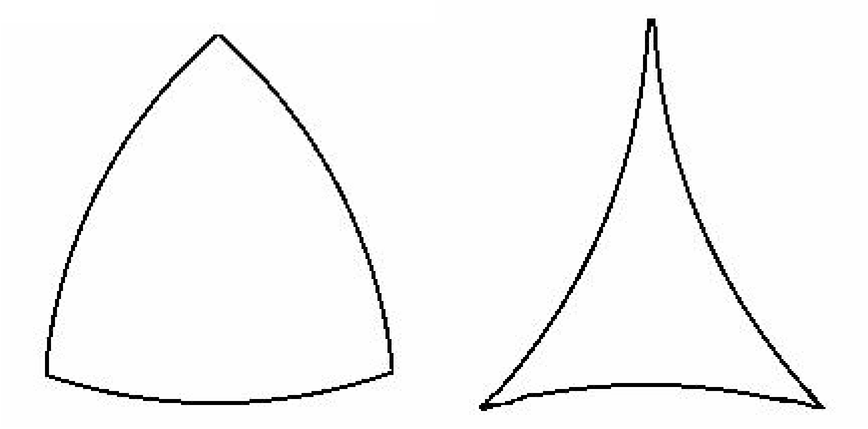
- $\sigma^2$ è la varianza

## QUESITO 5

Nella geometria euclidea vale il postulato delle parallele: per un punto esterno ad una retta passa UNA SOLA PARALLELA alla retta data; da questa proprietà discende la somma caratteristica degli angoli interni di un triangolo (un angolo piatto).

Se cade l'unicità delle parallele si hanno i seguenti casi:

- di paralle non ne esistono (geometria ellittica, modello di Riemann): la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo piatto
- la paralle non è unica (geometria iperbolica, modello di Poincaré, modello di Klein): in tal caso la somma degli angoli interni è minore di un agolo piatto.



triangolo ellittico triangolo iperbolico

Approfondimento:

http://it.wikipedia.org/wiki/Geometrie_non_euclidee

## QUESITO 6

Considero le tre circonferenze con centro in ognuno dei vertici del triangolo e raggio uguale a 1; la zona "favorevole" a P è la parte interna al triangolo ed esterna ai tre settori circolari interni al triangolo (in tali settori cadono i punti che distano da un vertice meno di 1).

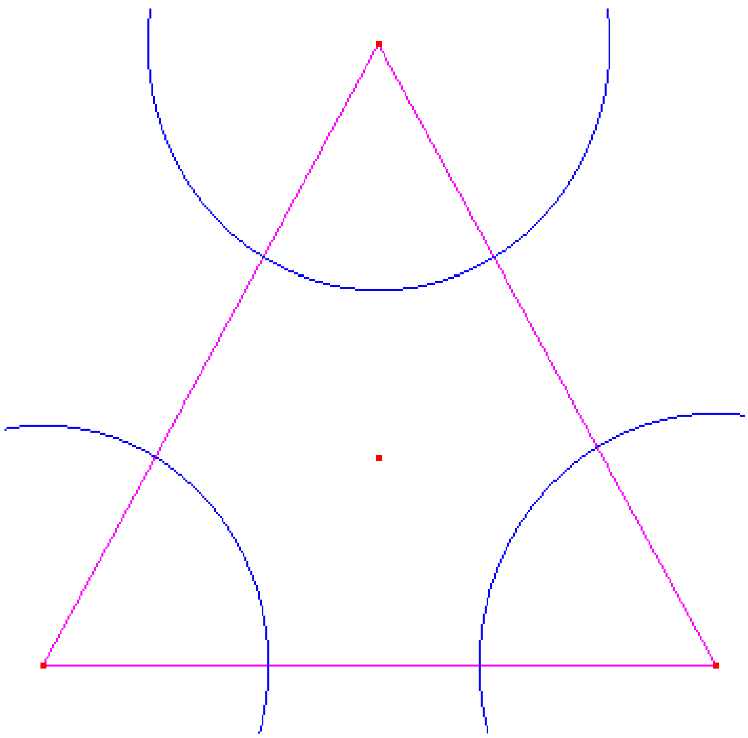
L'are complessiva dei tre settori è uguale a: $3 \cdot (\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$

L'area "favorevole" è data dalla differenza tra l'area del triangolo e quella dei trei settori:

$\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}$

La probabilità richiesta è data dal rapporto tra l'area "favorevole" e l'area "possibile":

$$\frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} \approx 0.597 \approx 60\%$$



## QUESITO 7

Il luogo richiesto è la normale alla parabola nel punto (1;2).
Il coefficiente angolare della tangente è: f'(1) = 2.
Il coefficiente della normale sarà quindi - 1/2.
Il luogo richiesto ha equazione:

y -2 = (-1/2) (x-1) ➔ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

## QUESITO 8

x = denaro iniziale giocatore 1
y = denaro iniziale giocatore 2
z = denaro iniziale giocatore 3

Dopo la prima giocata:

denaro giocatore 1 = x - y -z
denaro giocatore 2 = 2y
denaro giocatore 3 = 2z

Dopo la seconda giocata:

denaro giocatore 1 = 2(x - y -z )
denaro giocatore 2 = 2y - (x -y -z ) -2z = 3y -x- z
denaro giocatore 3 = 4z

Dopo la terza giocata:

denaro giocatore 1 = 4(x - y -z ) =24
denaro giocatore 2 = 2(3y -x- z) =24
denaro giocatore 3 = 4z - 2(x - y -z ) - (3y -x- z) = 7z -x -y = 24

Si tratta quindi di risolvere il sistema;

$$\begin{cases} x - y - z = 6 \\ 3y - x - z = 12 \\ 7z - x - y = 24 \end{cases}$$

che ha la soluzione **x = 39, y = 21, z = 12**

## QUESITO 9

$2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$

Posto $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$, trattandosi di una cubica possiamo affermare che interseca almeno una volta l'asse delle ascisse, quindi l'equazione ammette almeno una radice.
La sua derivata prima è:

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6$ che risulata sempre positiva (delta < 0); la funzione è quindi sempre crescente: avremo quindi una sola intersezione con l'asse x e l'equazione data ammetterà una sola soluzione.

Isoliamo la radice: f(-1) = -5, f(0) = 6
La radice è quindi nell'intervallo ( - 1 ; 0 ).

Applico il metodo delle tangenti.

f '' (x) = 12x - 6 > 0 per x >1/2 quindi nell'intervallo dato è negativa., come nell'estremo a = -1.

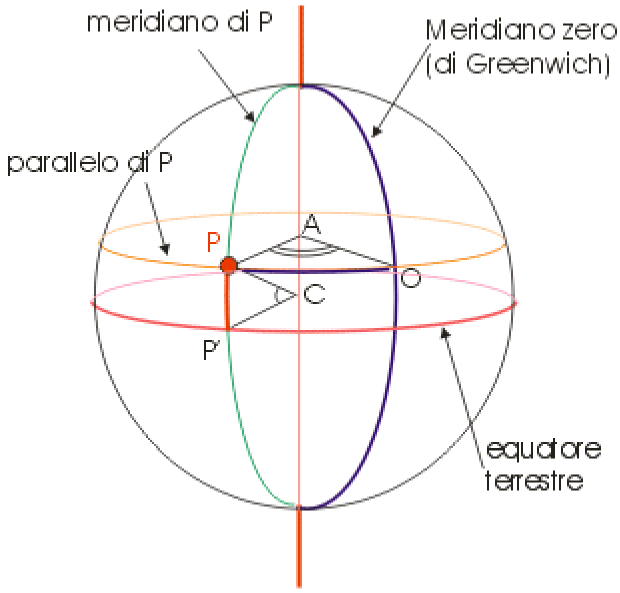
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \text{-0.72222}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \text{-0.6738}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \text{-0.6724}$$

La radice approssimata a meno di un centesimo è **- 0.67**

## QUESITO 10




**Piano equatoriale**: piano perpendicolare all'asse e passante per il centro della Terra
**Parallelo**: circonferenza ottenuta intersecando un piano parallelo a quello equatoriale con la superficie sferica
**Poli terrestri**: intersezioni tra superficie sferica e asse di rotazione
**Meridiano (geografico)**: semicirconferenza massima passante per i poli
**Merdiano zero ( o fondamentale)**: meridiano di riferimento (Greenwich)
**Parallelo zero (di riferimento)**: parallelo equatoriale

Dato un punto P della superficie terrestre si considerino il parallelo ed il meridiano passanti per esso; indichiamo con P' l'intersezione tra il meridiano per P e l'equatore; l'angolo PCP', essendo C il centro della sfera, è definito LATITUDINE e varia da O° a 90° se P è nell'emisfero Nord, da -90° a O° se P è nell'emisfero Sud.

Indichiamo con O l'intersezione tra il parallelo per P ed il merdiano fondamentale e sia A l'intersezione tra il piano parallelo per P e l'asse di rotazione: l'angolo PAO è definito LONGITUDINE e varia da 0° a 180° a EST del meridiano fondamentale, da -180° a 0° a Ovest del meridiano fondamentale.

La LATITIDINE $\lambda$ e la LONGITUDINE $\varphi$ definiscono un sistema di coordinate geografiche terrestri.