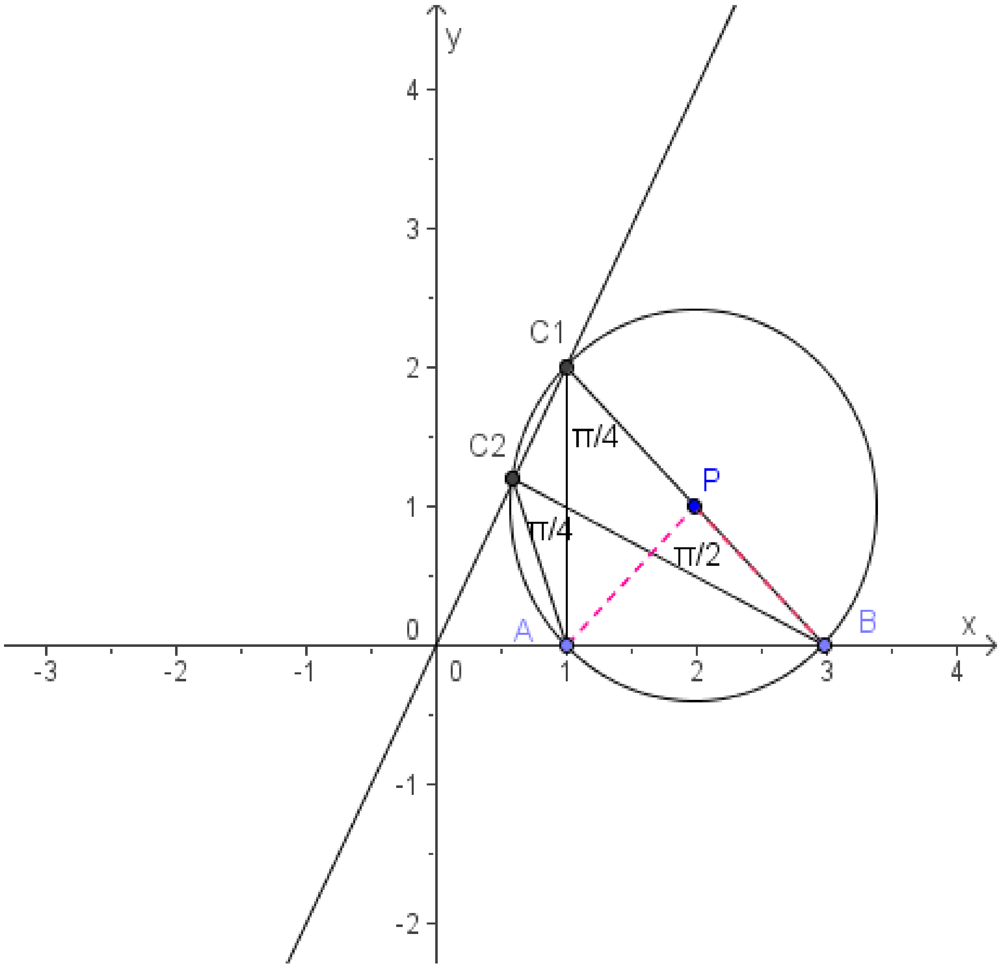
PNI 2008 - PROBLEMA 1

1.



I punti C richiesti appartengono al luogo dei punti che “vedono” il segmento AB “sotto” un angolo di $\pi/4$; tale luogo è costituto da due archi di circonferenza passanti per A e B e quello che ci interessa ha centro in P(2;1) (dovendo essere l’angolo al centro APB doppio dell’angolo alla circonferenza ACB, l’angolo APB risulta retto).

Circonferenza di centro P e passante per A e B (quindi raggio AP uguale a $\sqrt{2}$):

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

Intersecando tale circonferenza con la retta data si ottengono i due punti richiesti:

$$C_1(1;2),\ C_2(\frac{3}{5};\frac{6}{5})$$

Allo stesso risultato si può arrivare in termini analitici, indicando con $C(t;2t)$ il generico punto della retta, trovando i coefficienti angolari delle rette AC e BC (rispettivamente uguali a $\frac{2t}{t-1}$ e $\frac{2t}{t-3}$) e risolvendo l'equazione in t:

$$tg(A\hat{C}B)=tg(\frac{\pi}{4})=1=\left|\frac{m(AC)-m(CB)}{1+m(AC)\cdot m(CB)}\right|=\cdots\Rightarrow \quad \left|\frac{-4t}{5t^2-4t+3}\right|=1$$

Con soluzioni **t = 1 e t = 3/5**, che portano agli stessi punti C trovati precedentemente.

2.

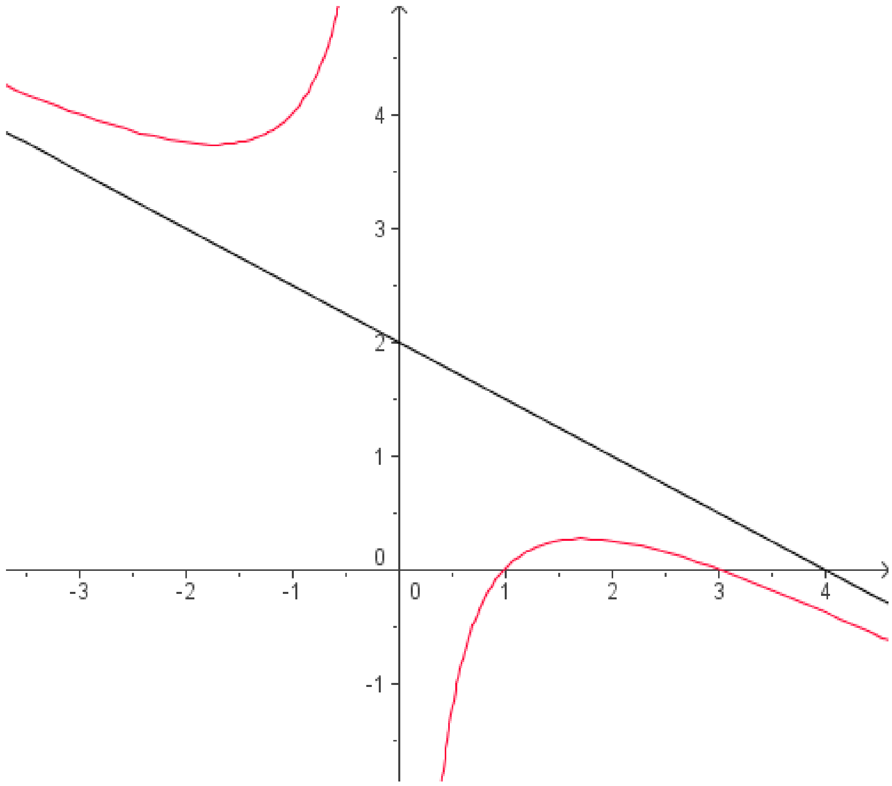
Per trovare il luogo richiesto si pone **C=(t;2t)**, si cercano le equazioni di due altezze e si intersecano per trovare il generico ortocentro.

Altezza uscente da C: x = t

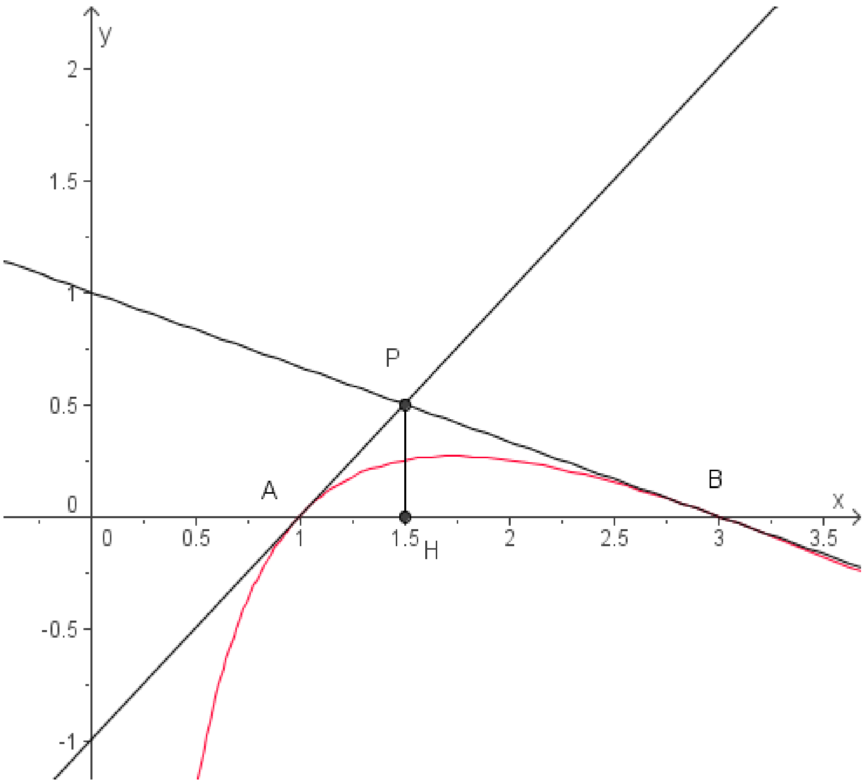
Altezza uscente da A: $y=\frac{3-t}{2t}(x-1)$

Mettendo a sistema le due equazioni e sostituendo x = t nella seconda si ottiene l'equazione del luogo: $y=\frac{(x-3)(1-x)}{2x}=-\frac{1}{2}x+2-\frac{3}{2x}$

Si tratta di un'iperbole di asintoti x = 0 e $y=-\frac{1}{2}x+2$, di centro (0;2) il cui grafico è il seguente:



3.



La tangente in A ha equazione: $y = x - 1$

La tangente in B ha equazione: $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Le due rette si intersecano nel punto P di ascissa uguale a 3/2.

L'area Ω si ottiene calcolando gli integrali seguenti:

$$\Omega = \int_{1}^{3/2} (x - 1 + \frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{2x})dx + \int_{3/2}^{3} (-\frac{1}{3}x + 1 + \frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{2x})dx = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$$

4.

Il calcolo di **ln 3** si può ottenere, per esempio, applicando uno dei metodi di integrazione numerica all'integrale

$$\ln 3 = \int_{1}^{3} \frac{1}{x} dx$$