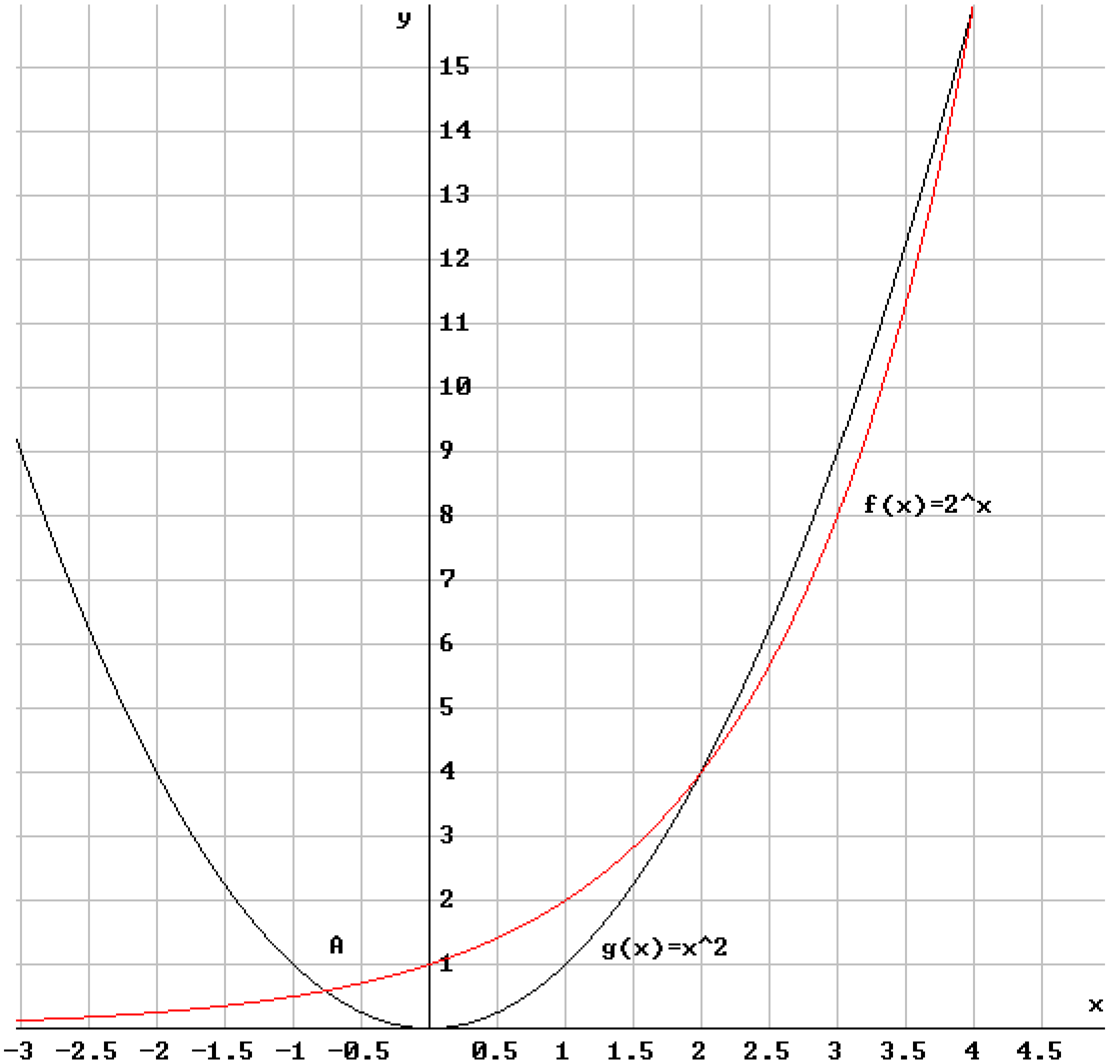
# PNI 2008 - PROBLEMA 2

## 1.

Le due funzioni sono rappresentate nella figura seguente (in rosso $f(x)=2^x$ e in nero $g(x)=x^2$).
I due grafici si incontrano nel punto A di ascissa negativa e nei punti di ascissa 2 e 4 (per x>4 f(x)>g(x)).




## 2.

Applichiamo **il metodo delle tangenti** per calcolare l'ascissa x di A con due cifre decimali esatte.

Risultando f(-1)=1/2<g(1)=1 ed f(0)=1>g(0)=0 possiamo affermare che x appartiene all'intervallo [-1;0].

Consideriamo quindi in tale intervallo la funzione di equazione: $h(x) = 2^x - x^2$; essa è continua e derivabile quanto si vuole con derivata continua.
Calcoliamo le derivate prima e seconda:

$$h'(x) = 2^x \ln(2) - 2x$$

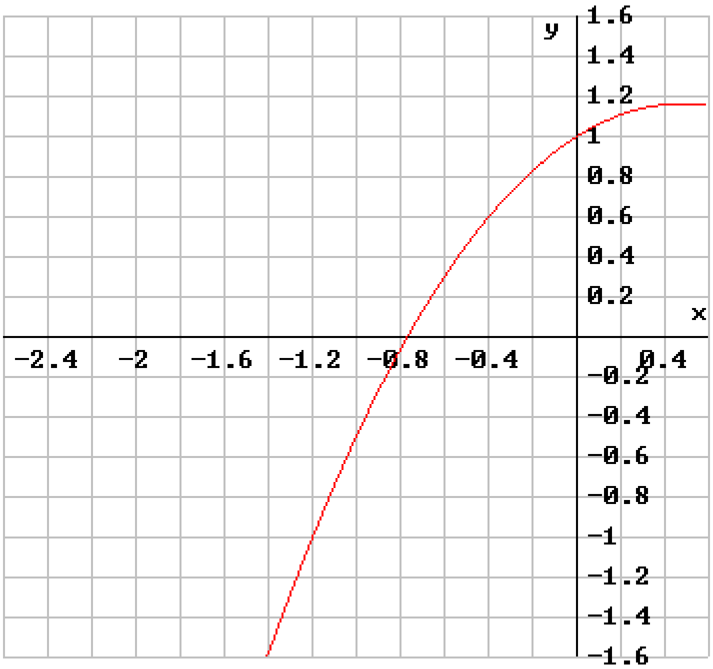
$$h''(x) = 2^x \ln^2(2) - 2$$

La derivata seconda risulta positiva se $x > \frac{1}{\ln 2} \ln(\frac{2}{\ln^2 2}) > 0$
E pertanto nel nostro intervallo è sempre negativa (si veda il grafico seguente).
Essendo h(-1) = -1/2, cioè dello stesso segno della derivata seconda, la formula iterativa di Newton parte da **a = -1**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

Con n=0 troviamo $x_1 = -0.7869$
…..

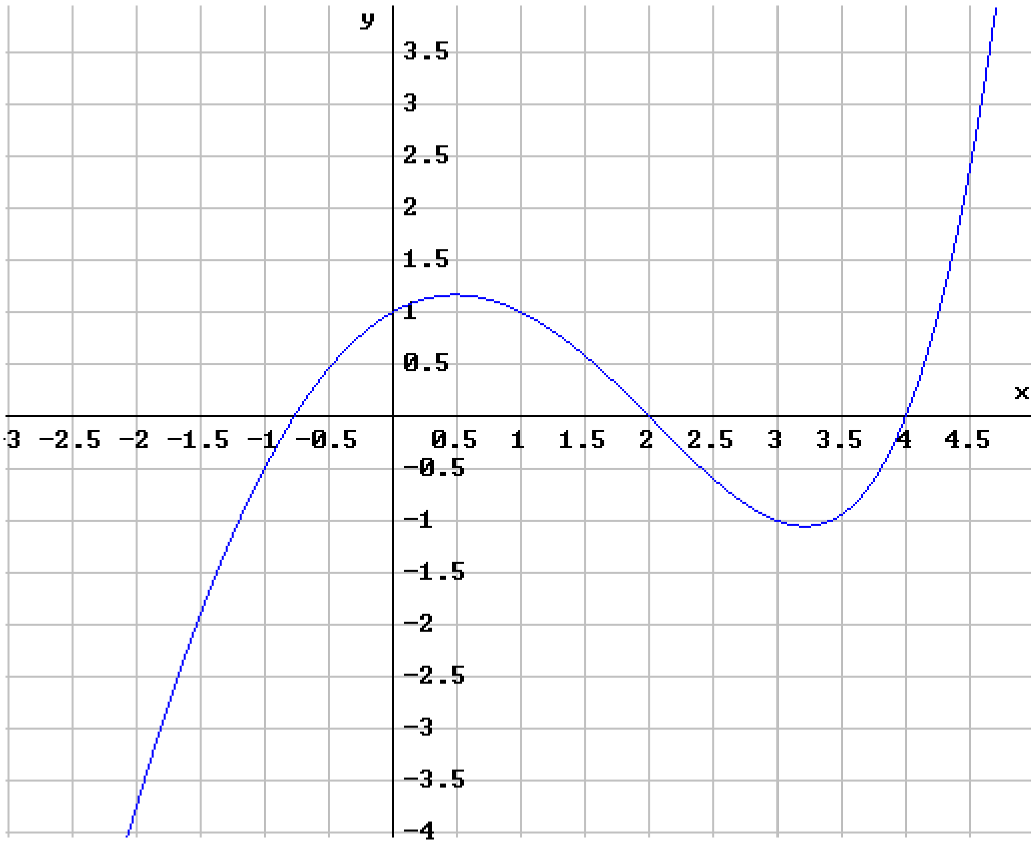
e proseguendo troviamo $x = -0.77$ come valore approssimato per difetto a meno di un centesimo ( il valore con 6 cifre decimali esatte fornito da Derive è $x = -0.766664$



## 3.

Dal confronto grafico indicato nel punto 1. deduciamo che h(x) ha **tre zeri** (la x di A, x=2 e x=4).

Di seguito il grafico della funzione $h(x) = 2^x - x^2$




## 4.

L'area richiesta è data da:

$$-\int_2^4 (2^x - x^2)dx = -\left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x3}{3}\right]_2^4 = \frac{56}{3} - \frac{12}{\ln 2} = 1.3543$$