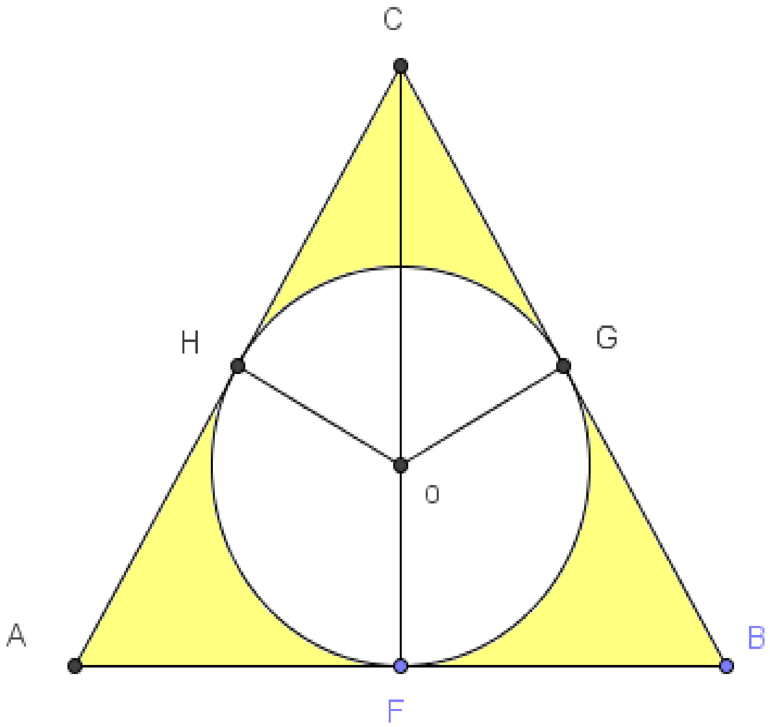
PNI 2008

QUESITO 1



Il triangolo ABC, sezione del cono con un piano perpendicolare alla base e passante per il vertice, è equilatero; indichiamo con 2R il lato del triangolo (R sarà il raggio di base del cono).
Il raggio r della sfera inscritta nel cono è OF, che è uguale a:

$$\overline{OF} = \overline{AF} \cdot tg(30°) = R\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Calcoliamo l'altezza CF del cono:

$$\overline{CF} = R \cdot tg(60°) = R \cdot \sqrt{3}$$

Calcoliamo ora il volume del cono e quello della sfera.

$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot (R \cdot \sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3} \qquad V(sfera) = \frac{4}{3}\pi \cdot (R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^3 = \frac{4}{27}\pi R^3\sqrt{3}$$

La probabilità richiesta è uguale al rapporto tra "il volume favorevole" ed "il volume possibile":

$$p = \frac{V(cono) - V(sfera)}{V(cono)} = 1 - \frac{V(sfera)}{V(cono)} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \cong 55.6\%$$

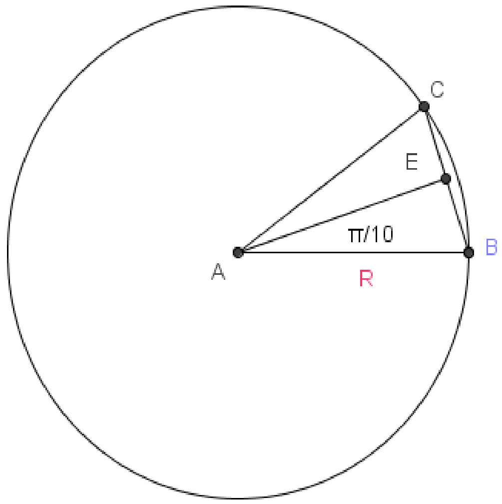
QUESITO 2

Detto R il raggio della circonferenza, il lato del decagono regolare inscritto, sezione aurea di R è dato da:

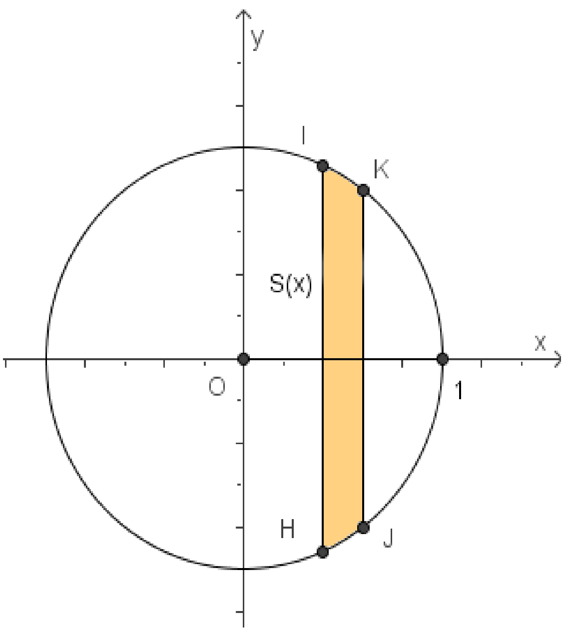
$$\overline{BC} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Poiché l'angolo BAC misura $\frac{2\pi}{10}$, detto AE il segmento perpendicolare a BC, si ha che l'angolo BAE è la metà dell'angolo BAC. Pertanto:

$\overline{BE} = \frac{\overline{BC}}{2} = R\frac{\sqrt{5}-1}{4} = R \cdot sen(\frac{\pi}{10})$, da cui, semplificando per R, si ottiene la relazione richiesta.



QUESITO 3



Indichiamo con dV =S(x) dx, il volume "elementare".
L'equazione della circonferenza è:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Il triangolo equilatero di base IH (pari a 2y) ha altezza $h = y \cdot \sqrt{3}$.

Pertanto: $S(x) = \frac{2y(y\sqrt{3})}{2} = y^2 \cdot \sqrt{3}$.

$$V = 2\left(\int_0^1 y^2 \cdot \sqrt{3}\, dx\right) = 2 \cdot \sqrt{3}\left(\int_0^1 (1-x^2)dx\right) = \ldots = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

QUESITO 4

La regola di de L'Hôpital è esposta in tutti i libri di testo. Applichiamola al caso proposto, che soddisfa le condizioni del teorema.
Il limite richiesto può essere riscritto nella forma seguente:

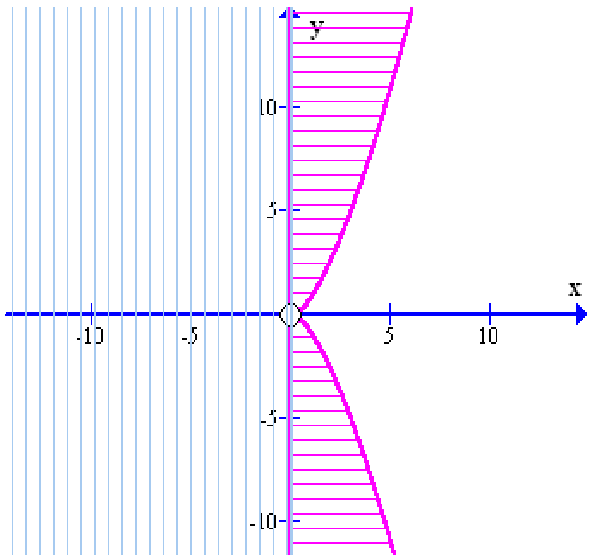
$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2^{\frac{x}{2008}}}\right)^{2008}$. Risulta più agevole il calcolo del limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^{\frac{x}{2008}}} \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^{\frac{x}{2008}}\cdot\frac{\ln 2}{2008}} = 0^+$$. Da cui segue che il limite richiesto è **0**.

QUESITO 5

- Se x<0 la disequazione è sempre soddisfatta (punti del semipiano x<0, tratteggio verticale).
- Se x=0 la disequazione è soddisfatta per ogni y diversa da zero (punti dell'asse y escluso l'origine).

Se x>0 la disequazione è soddisfatta per $y^2 > x^3 \quad \Rightarrow \quad y < -x^{\frac{3}{2}} \quad vel \quad y > x^{\frac{3}{2}}$ (punti con tratteggio orizzontale).



QUESITO 6

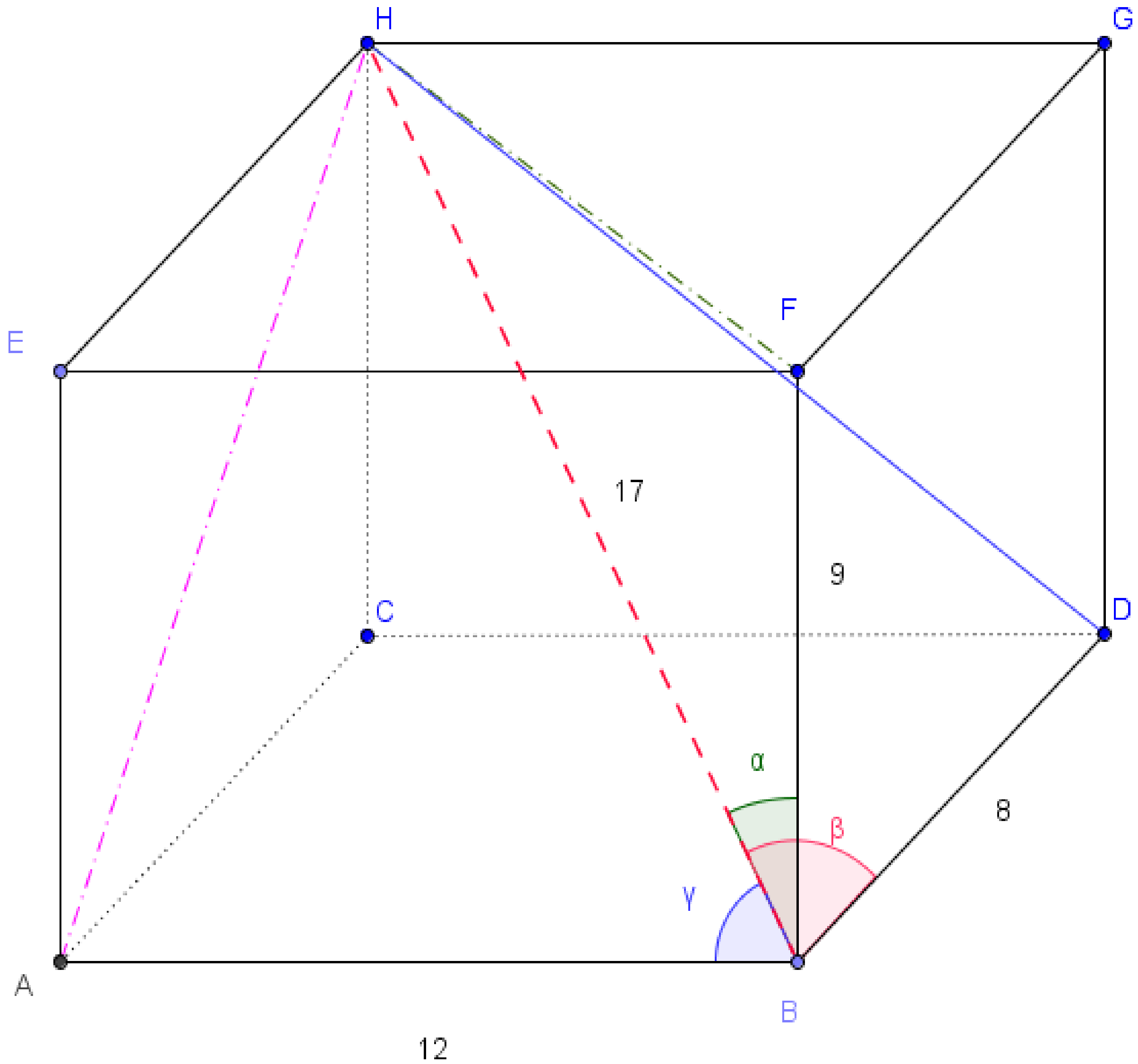
Con riferimento alla figura seguente si noti che:

- $\overline{BH} = \sqrt{8^2+9^2+12^2} = 17$
- $\overline{HF} = \sqrt{8^2+12^2} = \sqrt{208}$
- $\overline{HD} = \sqrt{9^2+12^2} = 15$
- $\overline{AH} = \sqrt{8^2+9^2} = \sqrt{145}$
- BF è perpendicolare ad HF, quindi : $tg(\alpha) = \frac{\overline{HF}}{\overline{BF}} = \frac{\sqrt{208}}{9} \quad \Rightarrow \alpha \cong 58°02'$
- BD è perpendicolare al piano CDGH quindi anche ad HD; il triangolo BDH è quindi rettangolo in D. Calcoliamo l'angolo tra la diagonale BH e lo spigolo BD:

$$tg(\beta) = \frac{\overline{HD}}{\overline{BD}} = \frac{15}{8} \quad \Rightarrow \beta \cong 61°55'$$

- BA è perpendicolare al piano ACHE quindi anche ad AH; il triangolo ABH è quindi rettangolo in A. Calcoliamo l'angolo tra la diagonale BH e lo spigolo AB:

$$tg(\gamma)=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{145}}{12}\quad \Rightarrow \gamma \cong 45°06'$$

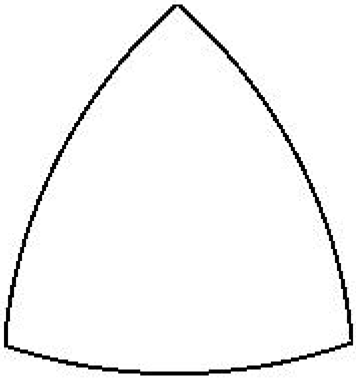


QUESITO 7

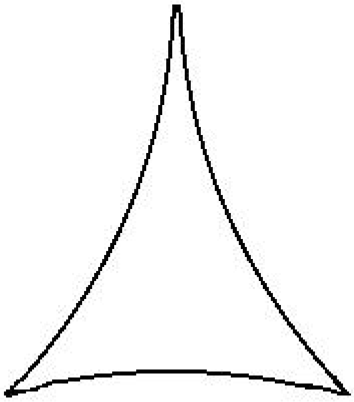
Si parla di "geometria non euclidea" per indicare una "geometria" che nega il "postulato delle parallele" di Euclide. Secondo tale postulato **è unica la parallela** ad una retta data passante per un punto esterno alla retta.
Da questa proprietà discende la somma caratteristica degli angoli interni di un triangolo (un angolo piatto).
Se cade l'unicità delle parallele si hanno i seguenti casi:

- **di parallele non ne esistono** (geometria ellittica, modello di **Riemann**): la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di un angolo piatto

- **la parallela non è unica** (geometria iperbolica, modello di **Poincaré**, modello di **Klein**): in tal caso la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto.



triangolo ellittico



triangolo iperbolico

Approfondimento:

http://it.wikipedia.org/wiki/Geometrie_non_euclidee

QUESITO 8

Il dominio della funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$ è dato da $x \geq 0$.
Calcoliamo le derivate prima e seconda nel punto richiesto:

$$f'(x) = \pi^x \cdot \ln(\pi) - \pi \cdot x^{\pi-1} \quad \Rightarrow \quad f'(\pi) = \pi^\pi \cdot \ln(\pi) - \pi \cdot \pi^{\pi-1} = \pi^\pi (\ln \pi - 1) > 0$$

$$f''(x) = \pi^x \cdot \ln^2(\pi) - \pi(\pi-1) \cdot x^{\pi-2} \quad \Rightarrow \quad f''(\pi) = \pi^\pi \cdot \ln^2(\pi) - (\pi-1) \cdot \pi^{\pi-1} > 0$$

QUESITO 9

La probabilità richiesta è $p = \dfrac{\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{20}{8}} \cong 0.2751 \cong 27.5\%$.

Al numeratore ci sono tutti casi favorevoli: il numero dei gruppi di quattro maschi moltiplicato per il numero dei gruppi di quattro femmine. Al denominatore ci sono tutti i casi possibili: il numero dei gruppi da otto che si possono fare con 20 studenti.

QUESITO 10

L'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di una curva di equazione y=f(x) è data da y=-f(-x); nel nostro caso: $y = -e^{2x}$.

L'equazione della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante di una curva di equazione y=f(x) è data da x=f(y); nel nostro caso:

$x = e^{-2y} \quad \Rightarrow \quad -2y = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}\ln x$.