PNI 2009 - PROBLEMA 1

1)

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x}$$

$$f(x)=\left(1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}\cdots+\frac{nx^{n-1}}{n!}\right)\cdot e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x}=$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)\cdot e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x}=$$

$$=-\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}$$

2)

- **Se n è pari** la derivata è sempre negativa, quindi la **funzione è sempre decrescente**: non esistono massimi e minimi.
- **Se n è dispari** la derivata è positiva per x<0, negativa per x>0 e nulla per x=0: la funzione **ammette quindi un massimo (assoluto) per x=0**.

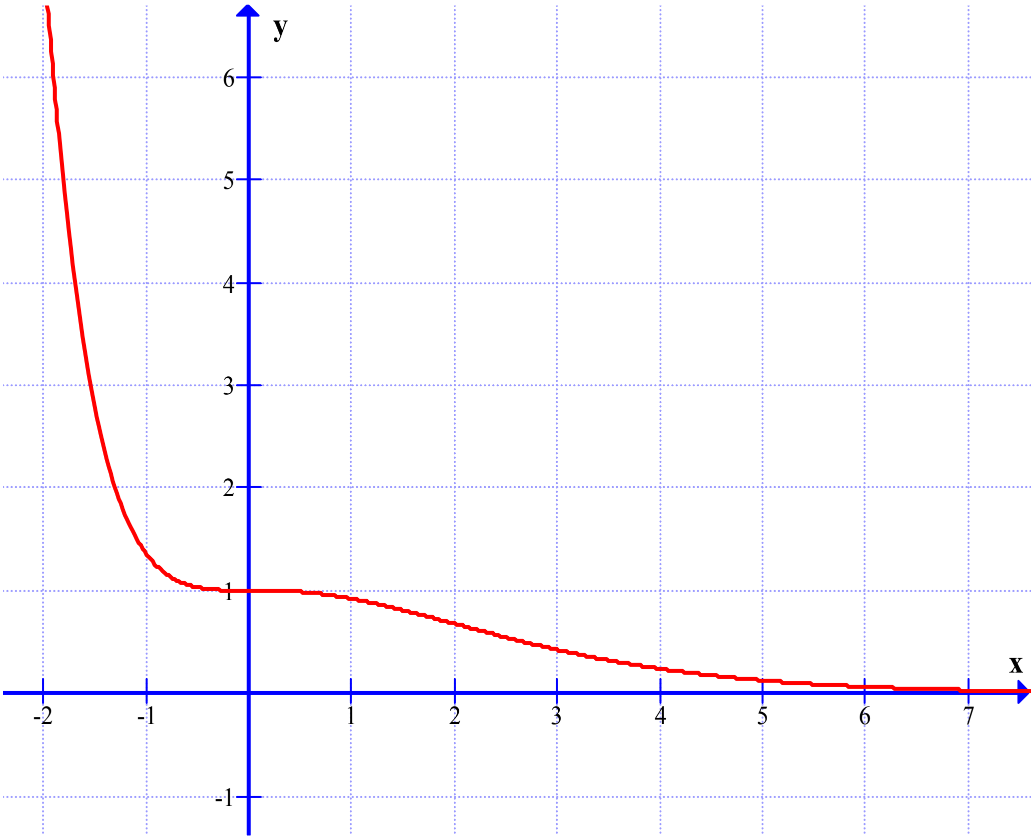
Per n dispari, quando risulta $f(x)\le 1$?

Per n dispari abbiamo un **massimo** assoluto in x=0, ed è f(0)=1: quindi $f(x)\le f(1)=1$ per ogni x.

3)

Con n=2 la funzione diventa: $g(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^{-x}$

- Definita su tutto R
- Sempre positiva
- Taglia l'asse y in y=1
- Il limite a + infinito è 0+, il limite al – infinito è + infinito
- $y'=-\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}=-\frac{x^2}{2}e^{-x}<0$ per ogni x; quindi la funzione è sempre decrescente.
- $y''=-xe^{-x}+\frac{x^2}{2}e^{-x}>0$ se $x^2-2x>0$ cioè per x<0 oppure x>2: la funzione è concava verso l'alto per questi valori di x, ha flessi in x=0 e x=2.



4)

$\int_{o}^{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx$: rappresenta l'area del trapezoide tra 0 e 2.

Integrando per parti si ha:

$$\left[-e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}+2x+3\right)\right]_0^2 = 3(1-3\cdot e^{-2}) \cong 1.78$$