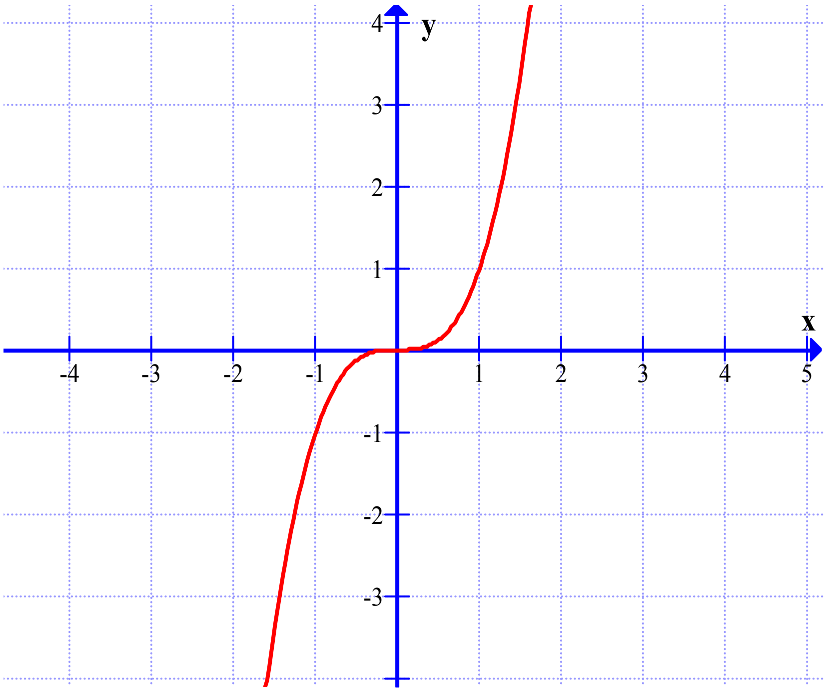
PNI 2009 - PROBLEMA 2

1)

$f(x) = x^3 + kx$

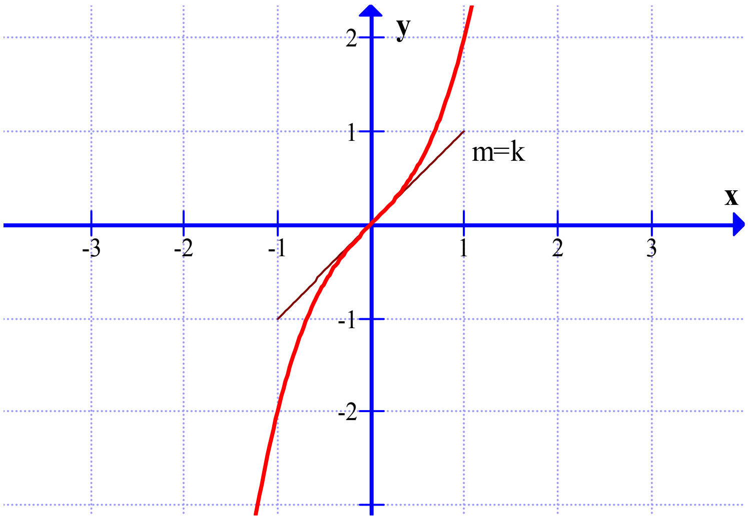
a) **k=0**: $f(x) = x^3$, il cui grafico è immediato.



b) **k>0**: $f(x) = x^3 + kx$

- funzione dispari, taglia l'asse x solo in x=0
- i limiti sono + infinito al + infinito e – infinito al – infinito
- $f'(x) = 3x^2 + k > 0$ per ogni x, quindi la funzione è sempre crescente
- $f''(x) = 6x \geq 0$ per $x \geq 0$: concava verso l'alto per x>0, flesso (con tangente di coefficiente angolare k) in x=0.

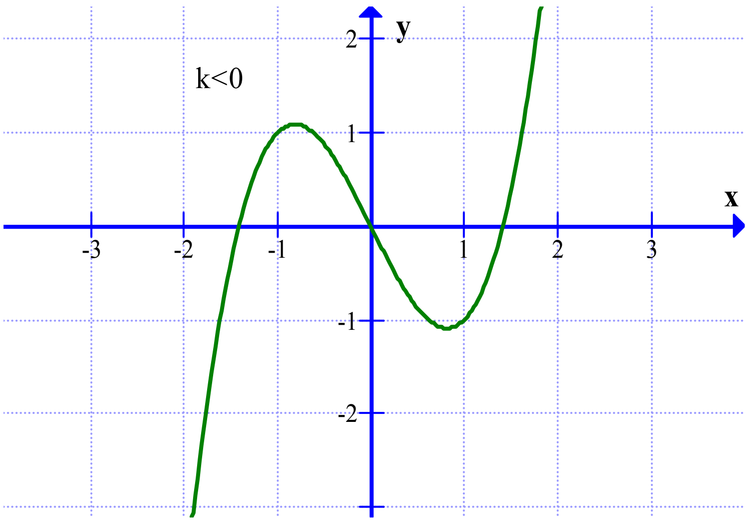
Il grafico è del tipo seguente:



c) **k<0**: $f(x) = x^3 + kx$

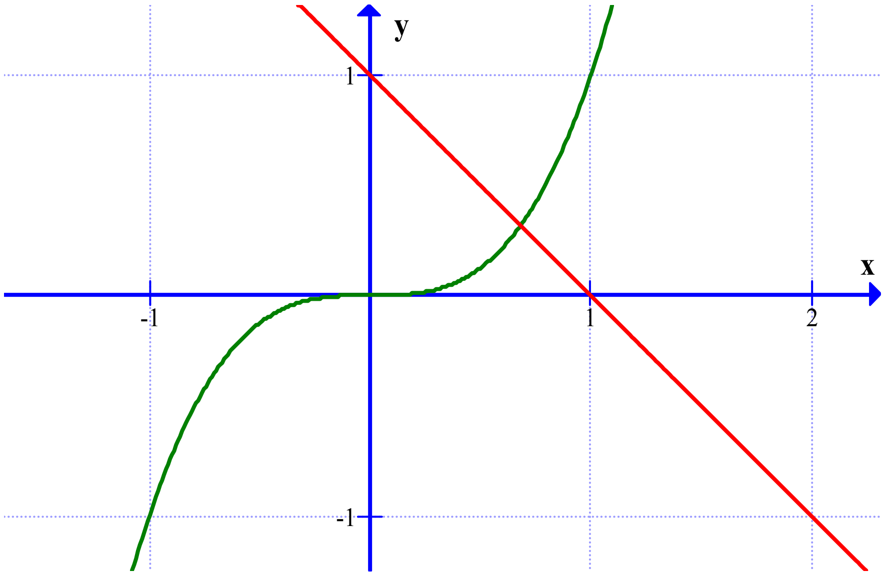
- funzione dispari, taglia l'asse x in x=0 e $x = \pm\sqrt{-k}$
- i limiti sono + infinito al + infinito e – infinito al – infinito
- $f'(x) = 3x^2 + k > 0$ per $x < -\sqrt{\frac{-k}{3}} \vee x > \sqrt{\frac{-k}{3}}$ ed in tali intervalli è quindi crescente; $x = -\sqrt{\frac{-k}{3}}$ è punto di massimo relativo, $x = \sqrt{\frac{-k}{3}}$
- $f''(x) = 6x \geq 0$ per $x \geq 0$: concava verso l'alto per x>0, flesso (con tangente di coefficiente angolare k) in x=0.
-

Il grafico è del tipo seguente:



2)

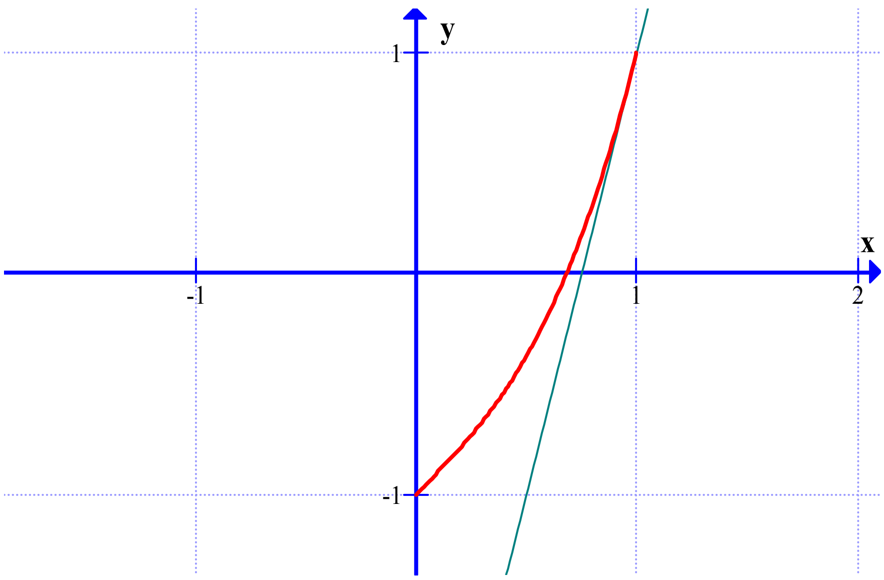
Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento la cubica e la retta:



Si verifica facilmente che le due curve si incontrano in un solo punto P, con ascissa tra 0 e 1.

Usiamo il **metodo delle tangenti di Newton** per determinare l'ascissa di P a meno di 0.1.

Risolvere l'equazione $x^3 = 1 - x$ equivale a trovare gli zeri della funzione $f(x) = x^3 + x - 1$; questa funzione soddisfa le ipotesi del metodo delle tangenti nell'intervallo [0;1]; f(0)=-1, f(1)=1, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ per ogni x, f"(x)=6x>0 nel nostro intervallo: la derivata seconda ha lo stesso segno di f(1), quindi si assume x=1 come punto iniziale dell'iterazione:



La formula iterativa è la seguente (si noti si converge verso la soluzione per valori decrescenti):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{4} = 0.75$$

$$x_2 = 0.75 - \frac{f(0.75)}{f'(0.75)} = 0.686$$

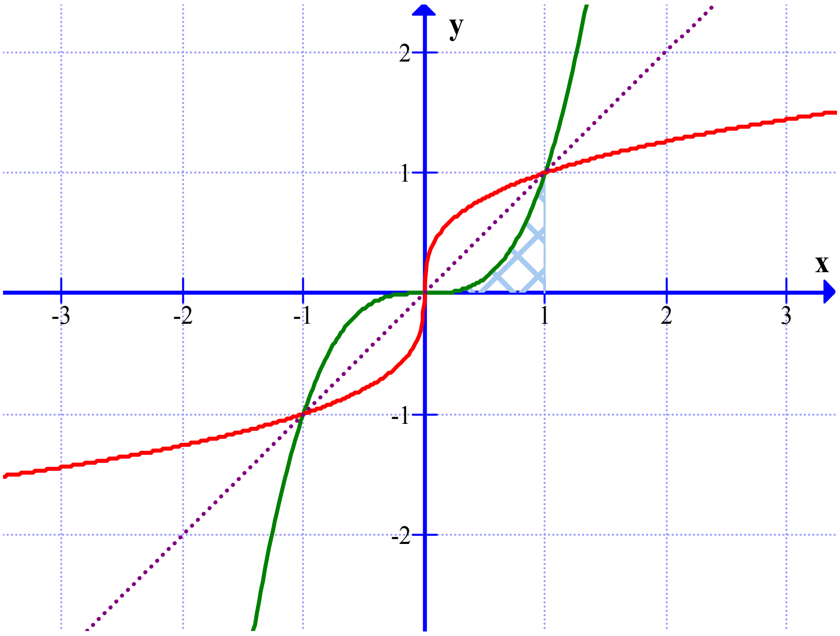
$$x_3 = 0.686 - \frac{f(0.686)}{f'(0.686)} = 0.682$$

La soluzione approssimata a meno di un decimo è quindi **0.6**

(valore fornito da Derive 0.682327)

3)

$g(x) = x^3$; la sua funzione inversa ha equazione $y = \sqrt[3]{x}$, ed il suo grafico è simmetrico rispetto alla retta y=x del grafico di g: rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento le due curve.

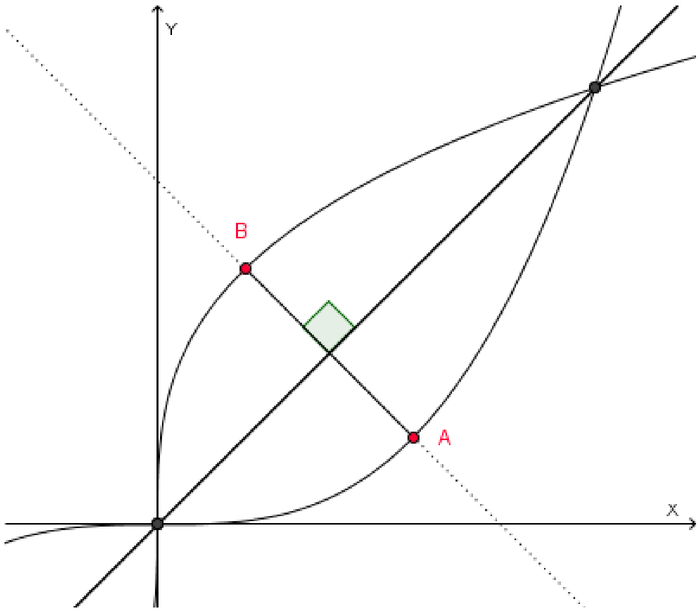


L'area richiesta è data dall'area del quadrato di lato 1 diminuita del doppio dell'area della regione tratteggiata; l'area della regione tratteggiata è data da:

$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$. L'are richiesta vale quindi: $1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

4)

Consideriamo la retta perpendicolare alla bisettrice del primo quadrante: **y = - x + q,** con q che può assumere valori tra 0 e 2. Indichiamo con A l'intersezione di tale retta con $g(x) = x^3$ e con B l'intersezione con $y = \sqrt[3]{x}$: la sezione di area massima si avrà in corrispondenza del massimo valore della distanza AB.



Ponendo $A = (t;t^3)$, per la simmetria tra le due curve sarà $B = (t^3;t)$
Risulta:

$$\overline{AB} = \sqrt{(t^3 - t)^2 + (t - t^3)^2} = |t^3 - t|\sqrt{2} = (t - t^3)\sqrt{2} \quad (\ldots\ 0<t<1)$$

Questa quantità è massima se lo è $z = t - t^3$;

$z' = 1 - 3t^2 \geq 0$ se $-\sqrt{\frac{1}{3}} \leq t \leq \sqrt{\frac{1}{3}}$: il massimo si avrà quindi in $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Con questo valore di t si trova:

$$\overline{AB} = (t - t^3)\sqrt{2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

La sezione di area massima vale quindi $12 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = 8\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Volume di W

Il solido è equivalente ad un prisma avente area di base pari a 1/2 e altezza 12: il suo valore è quindi 12*(1/2)= **6** (possiamo considerare W come un cilindro avente per base la regione D e altezza 12).

Il Volume di W può essere calcolato anche per mezzo degli integrali.
Tale volume può essere visto come la somma dei “volumetti” cilindrici con area di base la sezione rettangolare, diciamo S, e altezza ds (valutato sulla bisettrice y=x); siccome $ds = \sqrt{2}dx$, l’integrale (in dx) deve essere calcolato da 0 a 1:

$$\int_0^1 S \cdot ds = \int_0^1 \overline{AB} \cdot 12 \cdot ds = \int_0^1 12\sqrt{2}(x - x^3) \cdot \left(\sqrt{2}dx\right) = 24\int_0^1 (x - x^3) \cdot dx = 24\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6$$