PNI 2010

QUESITO 1

Siccome la derivata annulla le costanti e abbassa di uno l'esponente delle potenze, dopo n derivate rimarrà solo la derivata n-esima del termine di grado n.

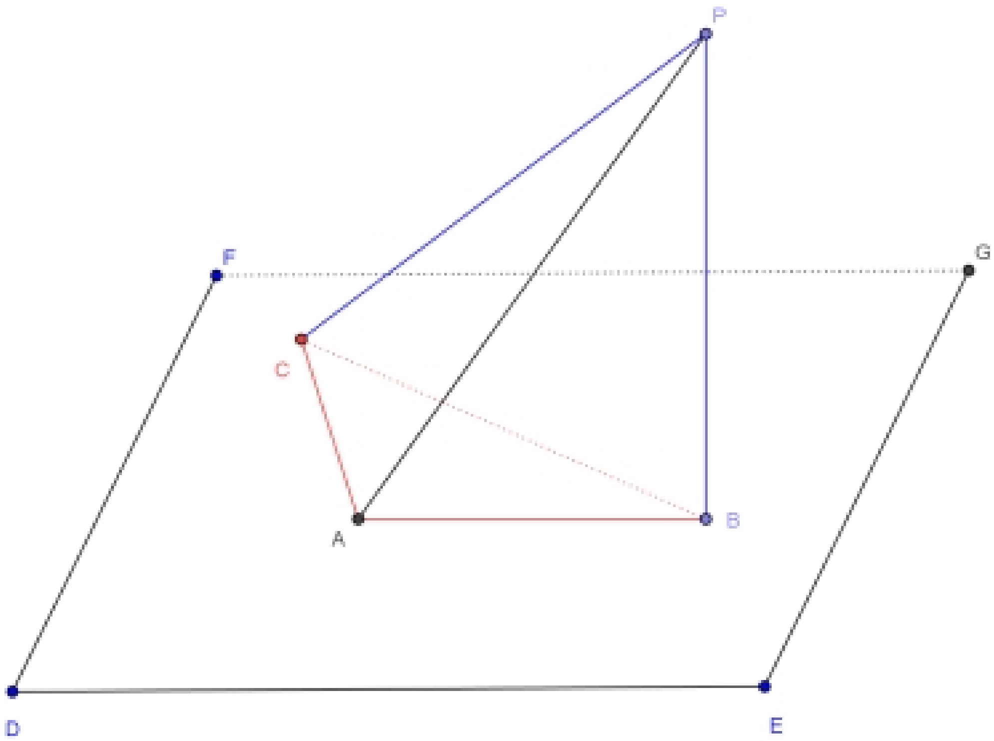
$D(a_n x^n) = n a_n x^{n-1}$

$D^2(a_n x^n) = n(n-1) a_n x^{n-2}$

e così via fino ad ottenere

$D^n(a_n x^n) = n(n-1)\cdot ...3\cdot 2\cdot 1 a_n = n! a_n$

QUESITO 2



Siccome PB è perpendicolare al piano di ABC, è perpendicolare a qualsiasi retta passante per B appartenente al piano, quindi PB è perpendicolare ad AB e a CB: i triangoli PAB e PBC sono quindi rettangoli in B.

Siccome dal piede della perpendicolare B al piano si conduce la perpendicolare BA alla retta AC dello stesso piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano individuato da PB e AB (**teorema delle tre perpendicolari**): quindi CA è perpendicolare alla retta PA e pertanto CAP è rettangolo in A.

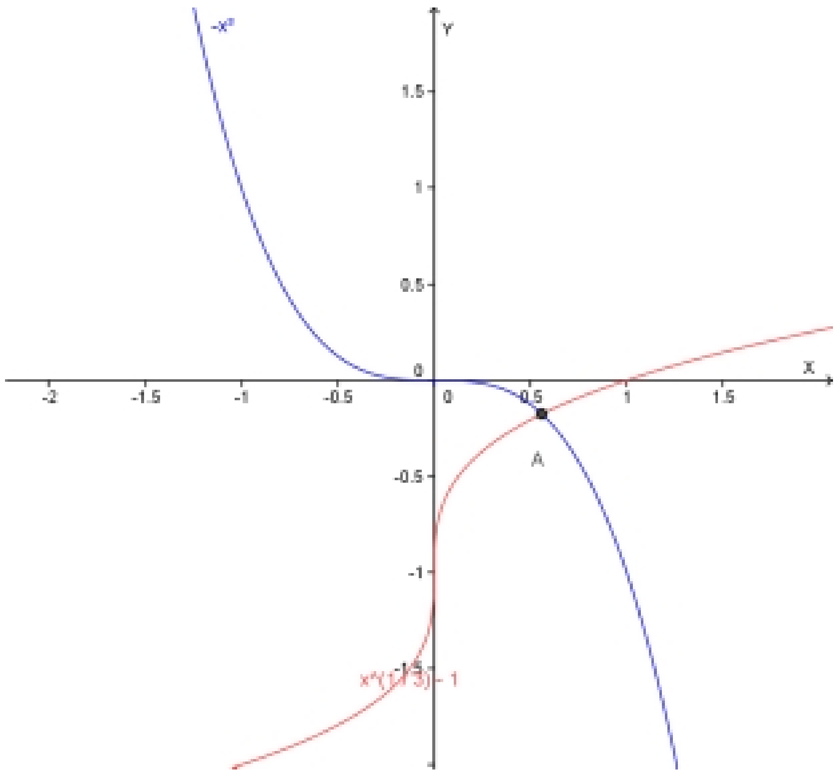
Si può alternativamente utilizzare il teorema di Pitagora per mostrare che CAP è rettangolo in A:
dal triangolo PAB: $PA^2 = PB^2 + AB^2$
dal triangolo PBC: $PC^2 = PB^2 + BC^2$.
Ricavando PB^2 dalla prima relazione e PC^2 dalla seconda si ottiene
$PC^2 = (PA^2 - AB^2) + BC^2 = PA^2 + (BC^2 - AB^2) = PA^2 + AC^2$
dove nell'ultima uguaglianza si è applicato il teorema di Pitagora al triangolo ABC.
Risulta quindi $PC^2 = PA^2 + AC^2$ che dimostra che il triangolo PAC è rettangolo in A.

QUESITO 3

Risulta $a = f'(x_0) = e^{x_0}$. Mettendo a sistema $y = e^{x_0} x_0$ con $y = e^{x_0}$ si ottiene $x_0 = 1$ quindi $f'(x_0) = e^1 = e = tg\alpha$ dove α è l'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse.
$\alpha = tg^{-1} e = 69{,}80° = 69°48'$.

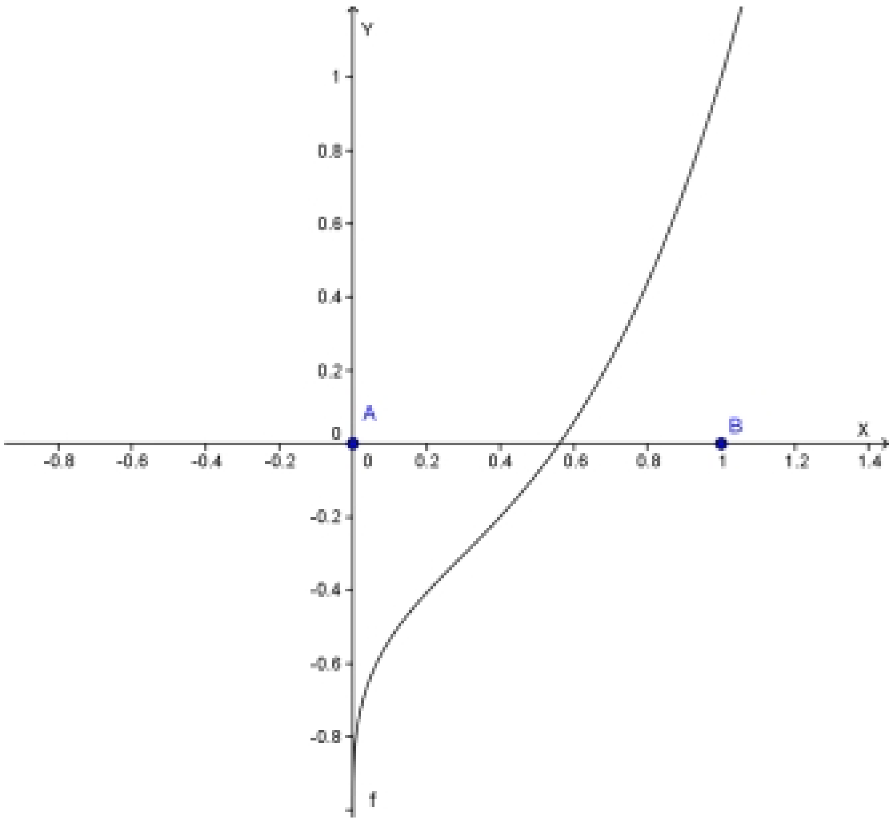
QUESITO 4

Gli zeri della funzione corrispondono alle ascisse delle intersezioni delle funzioni $y = \sqrt[3]{x} - 1$ e $y = -x^3$, di facile rappresentazione.



Dal grafico si osserva chiaramente che le due curve hanno un'unica intersezione (tra zero e uno).

Per trovare il valore richiesto si può applicare per esempio il **metodo di bisezione** alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$ nell'intervallo [0;1].



f(0)=-1, f(1)=1 quindi possiamo applicare il teorema degli zeri.

$f(\frac{1}{2}) \cong -0.08 < 0$: la soluzione è compresa tra $\frac{1}{2}$ e 1;

$f(\frac{3}{4}) > 0$: quindi la soluzione è compresa tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$

e proseguendo si scopre che **la soluzione è compresa tra 0.56 e 0.57**.
(Soluzione di Derive 0,560088).

QUESITO 5

Per essere simmetrica rispetto alla retta x=k deve risultare **f(x)=f(2k-x)**.

QUESITO 6

Il luogo descritto da P ha forma parametrica:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2sent \end{cases}$$

Ricavando **cos t** dalla prima e **sen t** dalla seconda, sostituendo nella relazione goniometrica fondamentale $sen^2 t + \cos^2 t = 1$ si ottiene:

$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ che è un'ellisse in forma canonica di semiassi a=3, b=2.

QUESITO 7

Anna ha esattamente due figli di cui almeno una femmina.
Le possibili coppie ordinate (per il primo e secondo figlio) sono:
M F
F M
F F
La probabilità che entrambi i figli siano femmine è 1/3.

QUESITO 8

Si tratta di verificare che, se n>3:

$$\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2}.$$

Equivalente a:

$$2\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3}$$

$$2\frac{n!}{(n-2)!2!} - \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-3)!3!}$$

$$\frac{n!}{(n-2)(n-3)!} - \frac{n!}{(n-1)(n-2)(n-3)!} = \frac{n!}{(n-3)!3!}$$

Riducendo al minimo comune multiplo si arriva all'equazione:

$$n^2 - 9n + 14 = 0$$

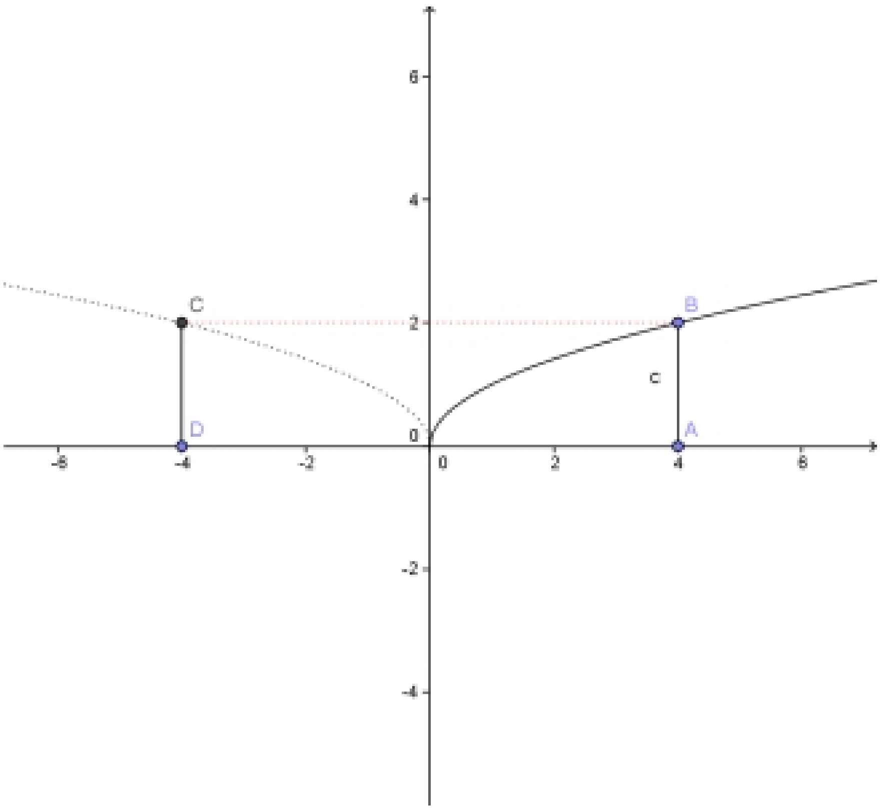
che ha le soluzioni n=2 ed n=7 **di cui è accettabile solo n=7.**

QUESITO 9

1) Per il teorema dei seni $\frac{3}{sen\gamma} = \frac{2}{sen45°}$ da cui $sen\gamma = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1 \Rightarrow$ impossibile.

2)Sempre per il teorema dei seni: $\frac{3}{sen\gamma} = \frac{2}{sen30°}$ da cui $sen\gamma = \frac{3}{4} \Rightarrow \gamma = sen^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ quindi $\gamma_1 = 48{,}59°$ e $\gamma_2 = \pi - \gamma_1 = 131{,}41°$, entrambi accettabili.

QUESITO 10



L'integrale $\int_0^4 2\pi x\left(\sqrt{x}\right)dx$ fornisce il volume del solido generato da R nella rotazione attorno all'asse y. Infatti:

$$\int_0^4 2\pi x^{\frac{3}{2}}dx = \left[\frac{4}{5}\pi x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{5}\pi \cdot 32 = \frac{128}{5}\pi .$$

Il volume del solido generato da R nella rotazione intorno all'asse y si ottiene sottraendo al volume del cilindro con raggio di base 4 e altezza 2 il volume del solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse y il grafico di $y = \sqrt{x}$ con x compresa tra 0 e 4.

$$\boxed{Volume = 32\pi - \pi\int_0^2 x^2\,dy = 32\pi - \pi\int_0^2 y^4\,dy = 32\pi - \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2 = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi}$$

Con la collaborazione di Simona Scoleri e Angela Santamaria