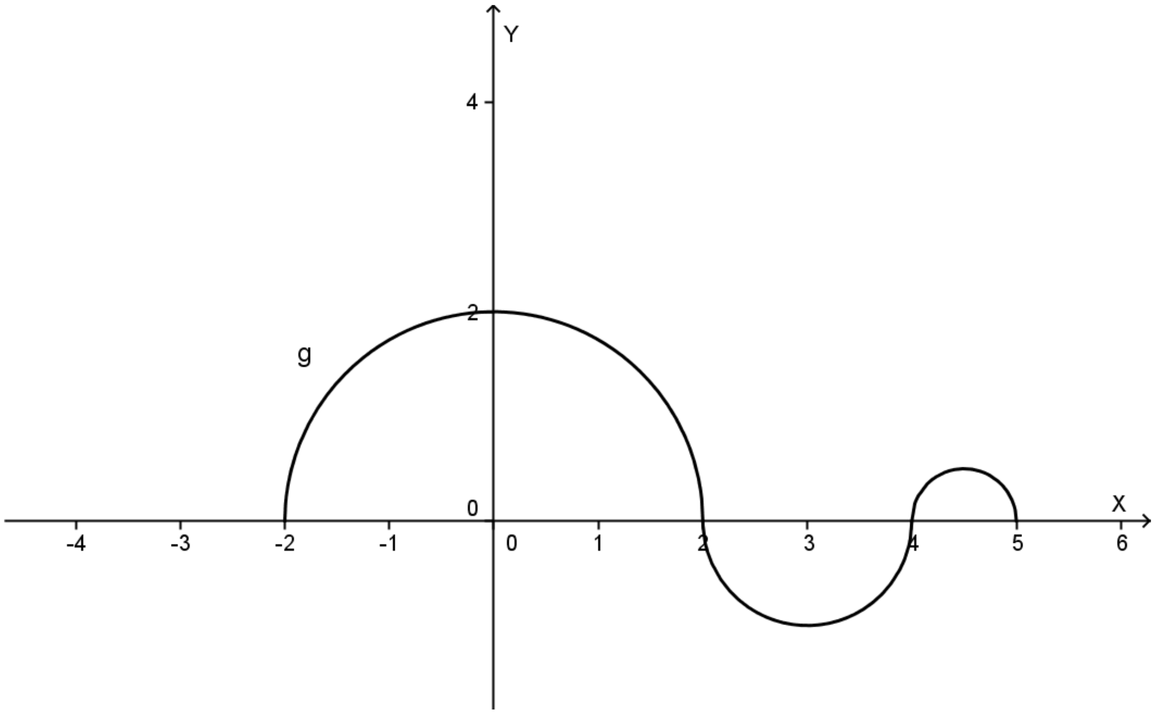
PNI 2010 - PROBLEMA 1

a)



Prima circonferenza: $x^2+y^2=4 \Rightarrow y=\sqrt{4-x^2}$

Seconda circonferenza: $(x-3)^2+y^2=1 \Rightarrow y=-\sqrt{-x^2+6x-8}$

Terza circonferenza: $(x-\frac{9}{2})^2+y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\sqrt{-x^2+9x-20}$

Quindi l'espressione analitica della g è:

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & se\ -2\le x<2\\ -\sqrt{-x^2+6x-8}, & se\ 2\le x<4\\ \sqrt{-x^2+9x-20}, & se\ 4\le x<5\end{cases}$$

La g(x) non è derivabile in x = -2, x = 2, x = 4 e x = 5, poiché la tangente in tali punti è verticale. In particolare la derivata destra in x = -2 è + infinito, la derivata (destra e sinistra) in x = 2 è - infinito, la derivata (destra e sinistra) in x = 4 è + infinito, la derivata sinistra in x = 5 è – infinito.

b)

Nell'intervallo 2<x<5 la funzione f, di cui g è la derivata, presenta un massimo relativo in x=2 ed un minimo relativo in x=4. Infatti risulta:

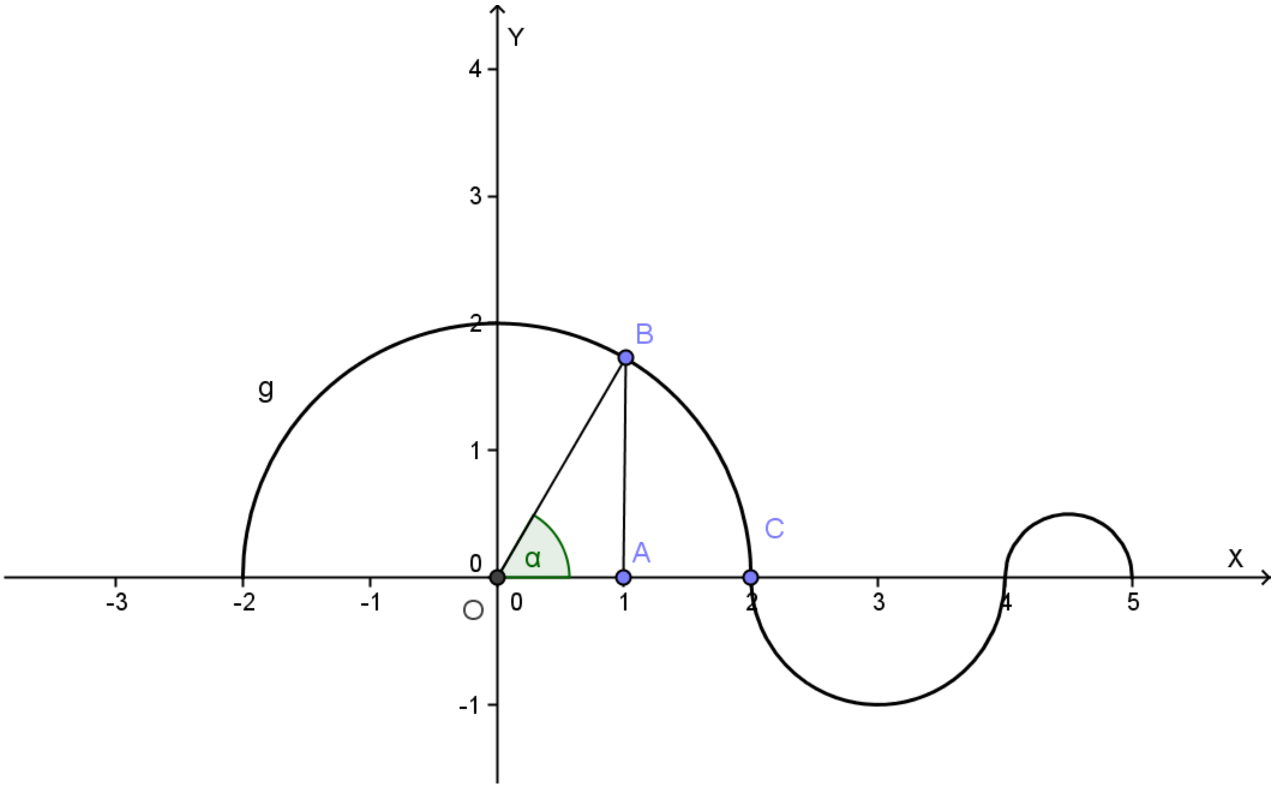
f'(x)=g(x)=0 per x=2 e x=4
f'(x)>0 per -2<x<2 e per 4<x<5 (il segno di f' corrisponde al segno di g): f crescente
f'(x)<0 per 2<x<4: f decrescente.

c)

$$f(x)=\int_{-2}^{x} g(t)dt$$

$$f(4)=\int_{-2}^{4} g(t)dt = area\ \ primo\ semicerchio - area\ secondo\ semicerchio = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

$f(1)=$ area delimitata dal primo semicerchio, dall'asse x e dalla retta x=1.



L'area richiesta si ottiene togliendo dal semicerchio l'area di ACB, e questa si ottiene togliendo dal settore circolare AOB (di ampiezza 60°) l'area del triangolo OAB:

area semicerchio – area(ABC)= area semicerchio – (area settore COB – area triangolo AOB) = $2\pi - \left(\frac{1}{6}(4\pi) - \frac{1 \cdot 2 \cdot sen(60°)}{2}\right) = 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{6} = f(1)$

d)

f''(x)=0 dove g'(x)=0: dal grafico della g(x) si deduce che g'(x)=0 in x=0, x=3 e x=9/2.

f(x)>0 dove l'integrale che la definisce è >0. Tenendo presente il significato geometrico della funzione integrale e osservando che l'area del secondo semicerchio è minore dell'area del primo, risulta

$f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)dt > 0$ per ogni x.

Per il grafico qualitativo della f si osservi che:

f(-2)=0   f'(-2)=g(-2)=0   f''(0)=g'(0)=0 (flesso)   f'(x)>0 da -2 a 2

in x=2 c'è un massimo

f'(x)<0 da 2 a 4; **in x=4 minimo**, f''(3)=0 (flesso in x=3)

f'(x)>0 da 4 a 5, f''(9/2)=0 (flesso in x=9/2), f'(5)=0