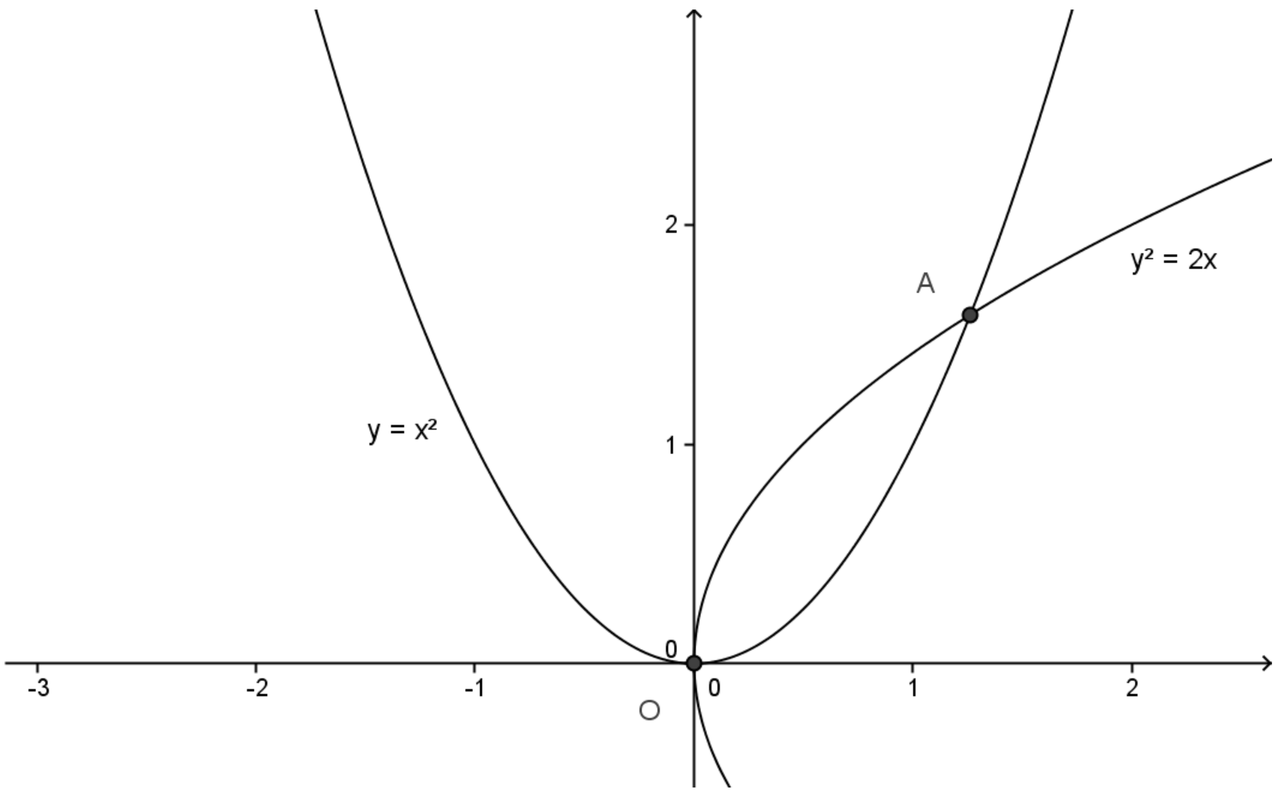
PNI 2010 - PROBLEMA 2

a)



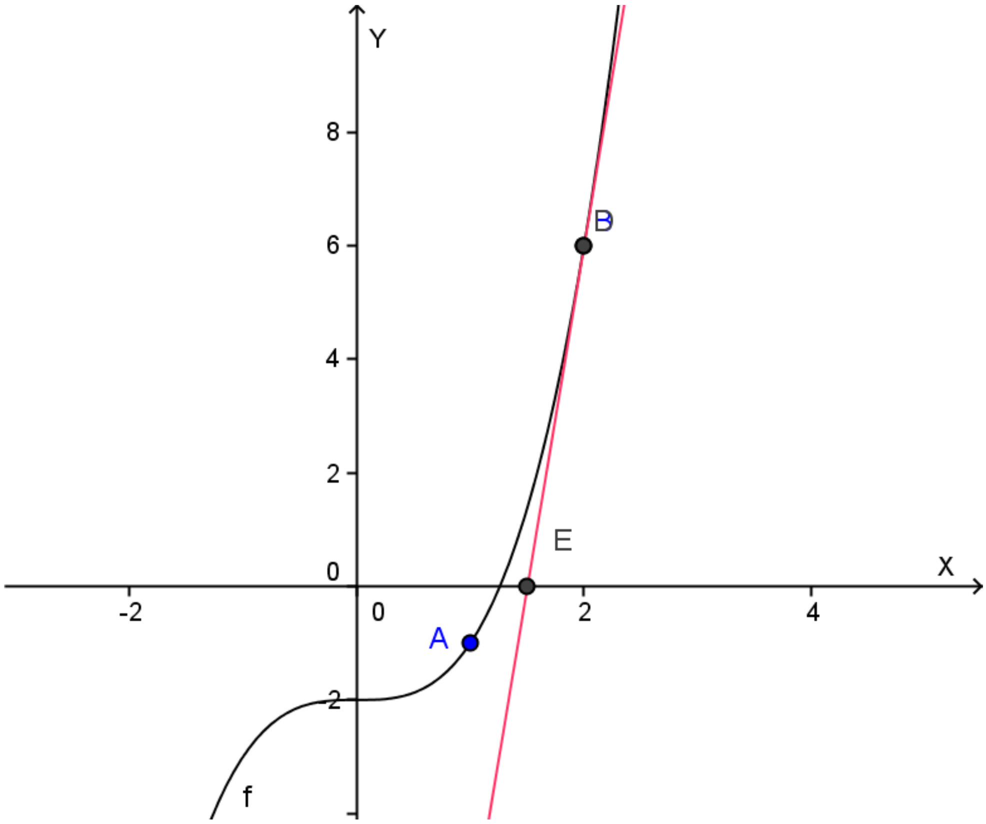
La parabola di equazione $y^2 = 2x$ ha il fuoco di coordinate (1/2;0) e direttrice x=-1/2
La parabola di equazione $x^2 = y$ ha il fuoco di coordinate (0;1/4) e direttrice y=-1/4

L'intersezione A si ottiene risolvendo l'equazione $x^4 = 2x$ che, escludendo x=0 porta all'equazione $x^3 = 2$. Quindi l'ascissa di A è $x = \sqrt[3]{2}$.

b)

Il numero $\sqrt[3]{2}$ è legato al problema della duplicazione del cubo (**Costruire il lato del cubo di volume doppio rispetto quello di un cubo dato).**
Insieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della quadratura del cerchio è uno dei tre problemi classici della geometria greca, che non possono essere risolti usando solo riga e compasso.

Per trovare un valore approssimato a meno di un centesimo applichiamo il metodo delle tangenti alla funzione $f(x) = x^3 - 2$ all'intervallo [1;2].



Osserviamo che nell'intervallo [1;2] risulta:

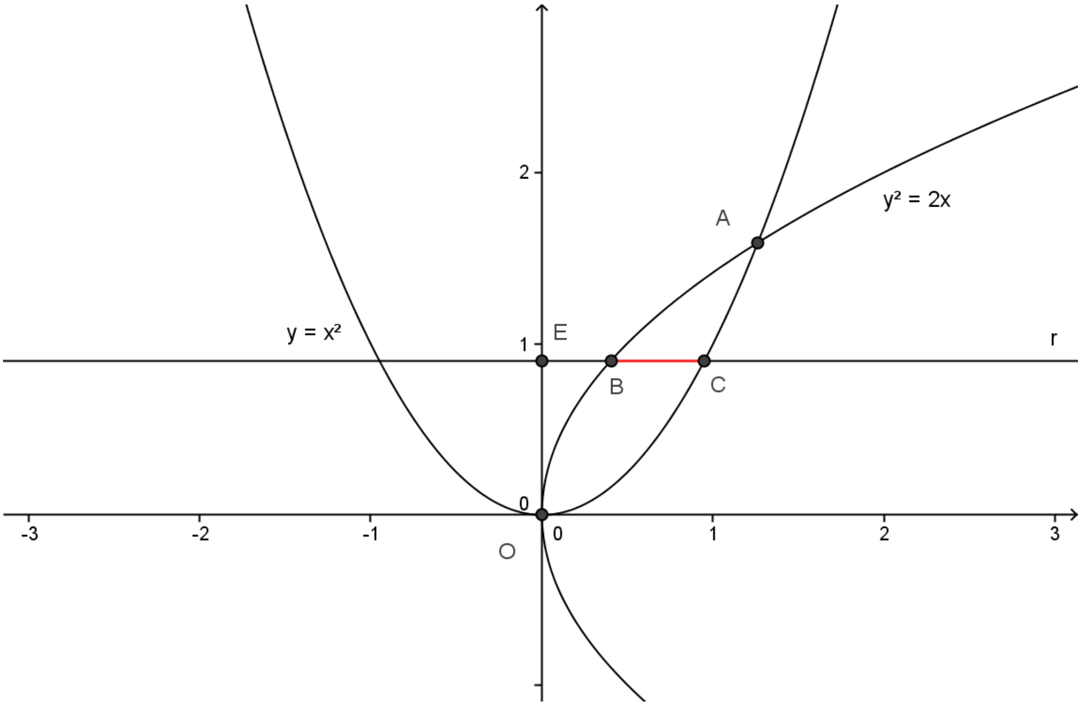
$$f(1) = -1 < 0 \quad f(2) = 6 > 0 \quad f'(x) = 3x^2 > 0 \quad f''(x) = 6x > 0 \quad f(2)f(x) > 0$$

quindi assumiamo b=2 come punto iniziale dell'iterazione (i valori saranno decrescenti).

$$x_0 = 2$$
$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 1.5$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.296...$$

Procedendo con l'iterazione si trova il valore richiesto x=1.26, approssimato per eccesso a meno di un centesimo.

c)



Retta r: y=t

Coordinate di $B = (\frac{t^2}{2}; t)$

Coordinate di $C = (\sqrt{t}; t)$

$\overline{BC} = \sqrt{t} - \frac{t^2}{2} = f(t)$: cerchiamo il massimo di questa funzione nell'intervallo

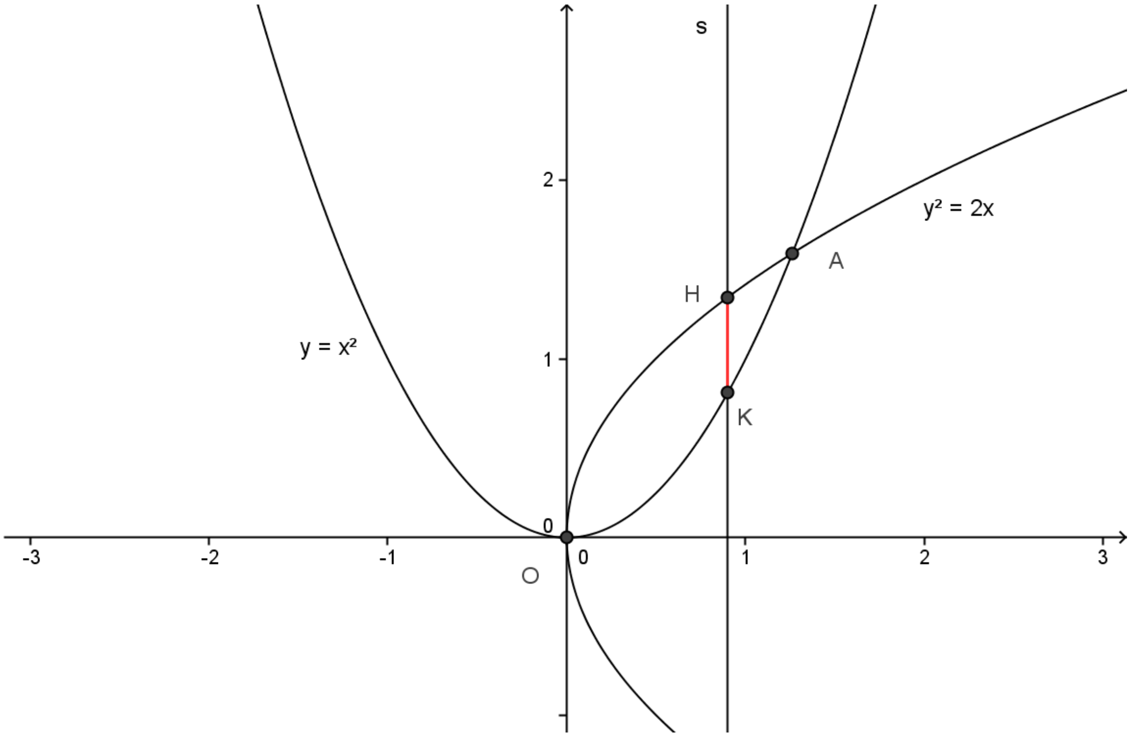
$0 \le t \le y_A \Rightarrow 0 \le t \le \sqrt[3]{4}$

$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - t = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

$f''(t) = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}} - 1 \Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) < 0$ quindi in $t = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ abbiamo il massimo richiesto.

La retta r che individua il segmento di lunghezza massima ha equazione $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

d)



Le sezioni di W con piani ortogonali all'asse x sono **corone circolari** (quelle generate dalla rotazione del segmento HK attorno all'asse x).

Il volume di **W** si ottiene calcolando l'integrale

$$\pi\int_0^{\sqrt[3]{2}}(2x-x^4)dx=\pi\left[x^2-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[3]{2}}=\pi\left(\sqrt[3]{4}-\frac{\sqrt[3]{32}}{5}\right)\cong 3$$