PNI 2012 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

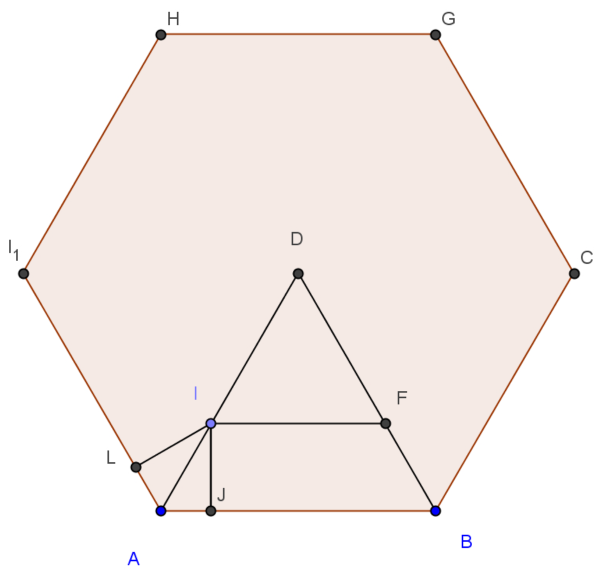
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{8^x-81^x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{81^x\left(\left(\frac{8}{81}\right)^x-1\right)}{x\cdot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{81^x\ln\left(\frac{8}{81}\right)}{x}=-\infty$$

N.B. $\frac{81^x}{x}\to+\infty$ ed ln(8/81) è negativo; inoltre è stato applicato il limite notevole (per x -> 0+ $\frac{a^x-1}{x}$ che risulta ln(a).

QUESITO 2

La moneta cade internamente ad una mattonella se il suo centro dista dai lati della mattonella meno del suo raggio R=d/2=23,25/2. L'area favorevole sarà quindi l'area di un esagono concentrico a quello dato, con i lati paralleli a quelli della mattonella. Il lato L=IF dell'esagono interno è pari a 10 cm – 2AJ; dove

AJ=IJ*tg(30°)= $\frac{d}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}$; quindi L=10cm-$d\frac{\sqrt{3}}{3}$=(10 -2,325*$\frac{\sqrt{3}}{3}$)cm (N.B. L'angolo IAJ=60°)



La probabilità richiesta è data dal rapporto tra l'area dell'esagono piccolo e l'area della mattonella.

Area esagono piccolo = pa= 3L*a, dove a è l'apotema, pari a (L/2)* $\sqrt{3}$; quindi:

pa= 3L*(L/2)* $\sqrt{3}$ = $\frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$

Area mattonella =pa= $\frac{3 \cdot 100 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Probabilità= $\frac{L^2}{100} =$ **0.74955**

QUESITO 3

$f(x) = 3^x$; $f'(x) = 3^x \ln 3 = 1$; quindi deve essere $3^x = \frac{1}{\ln 3}$; e passando ai logaritmi naturali di entrambi i membri: $x \ln 3 = \ln\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$ da cui $x = \frac{-\ln(\ln 3)}{\ln 3} \cong -0.086$ (per eccesso).

QUESITO 4

I due insiemi numerici sono equipotenti, infatti si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra N e Q, rappresentando i numeri razionali positivi in una tabella del tipo:
1/1, 2/1, 3/1, …
1/2, 2/2, 3/2, …
1/3, 2/3, 3/3, ….
…………….

(per approfondire consulta questa pagina: http://it.wikipedia.org/wiki/Insieme_numerabile)

QUESITO 5

I segmenti richiesti sono tanti quante le combinazioni senza ripetizioni di n oggetti a 2 a 2: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$

Il numero dei triangoli richiesti è pari alle combinazioni senza ripetizioni di n oggetti a 3 a 3:
$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

Il numero dei tetraedri è pari alle combinazioni senza ripetizioni di n oggetti a 4 a 4:
$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$

QUESITO 6

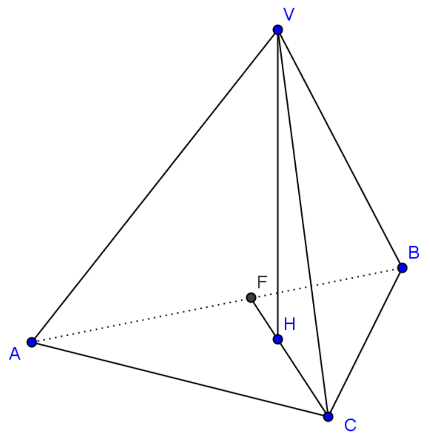
$y = x^3 + ax + b$; ogni cubica ha uno ed un solo flesso, che si ottiene annullando la derivata seconda, e ogni cubica è simmetrica rispetto al suo flesso.

$y' = 3x^2 + a$; $y'' = 6x = 0$ se x=0; il flesso è quindi nel punto F=(0;b).

Per verificare che la curva data è simmetrica rispetto ad F basta effettuare la trasformazione x➔-x, y➔2b-y e scoprire che l'equazione non cambia:

$$2b - y = -x^3 - ax + b \;➔\; y = x^3 + ax + b$$

QUESITO 7



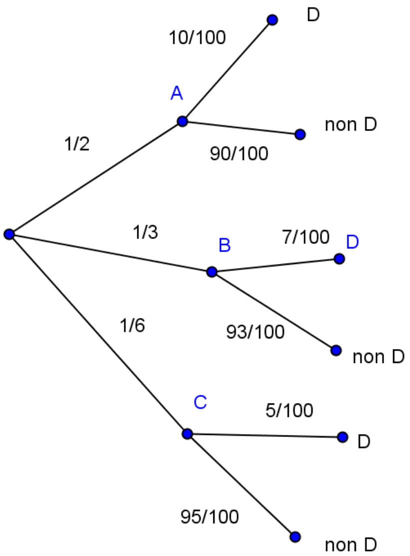
Posto VC=l, esprimiamo CH in funzione di l.

Intanto notiamo che H è il baricentro del triangolo equilatero ABC, quindi CH=2HF. L'altezza CF del triangolo equilatero è data da: $\frac{l}{2}\sqrt{3}$; quindi $CH = (2/3)CF = \frac{l}{3}\sqrt{3}$.

Detto α l'angolo tra VH e VC, risulta: $sen\alpha = \frac{HC}{VC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ da cui $\alpha = arcsen(\frac{\sqrt{3}}{3}) \cong 35°$

QUESITO 8

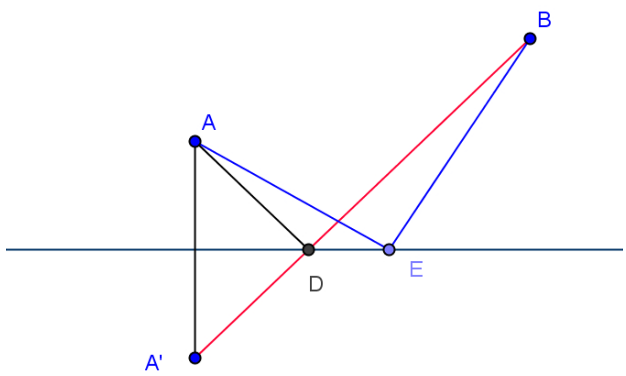
Rappresentiamo i dati forniti nel seguente diagramma ad albero:



Analizzando lo schema precedente, la probabilità richiesta, per il teorema di Bayes, è data da:

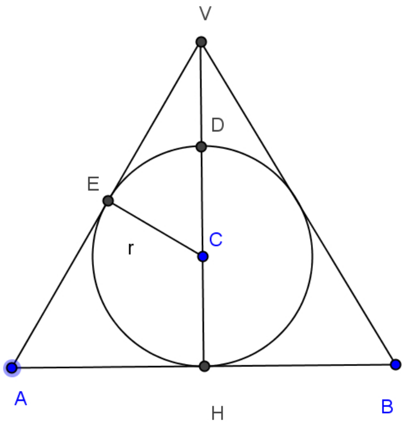
$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{100}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{100}}=\frac{30}{49}\cong 61.2\%$$

QUESITO 9



Indicato con A' il simmetrico di A rispetto alla retta r data e congiungendo A' con B, otteniamo il punto D tale che AD+DB risulti minimo. Infatti preso un qualunque altro punto E sulla retta, risulta: AE+BE=A'E+BE $\geq$ A'B=A'D+DB=AD+DB.

QUESITO 10



Poniamo VD=x (con x>0). Dalla similitudine fra i triangoli AHV e VCE risulta: VE:CE=VH:AH.

VC=r+x; $VE=\sqrt{VC^2-EC^2}=\sqrt{(x+r)^2-r^2}=\sqrt{x^2+2rx}$; VH=2r+x; quindi:

$$AH=\frac{CE\cdot VH}{VE}=\frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$$

Risulta poi: VA:VH=VC:VE, da cui $VA=\frac{VH\cdot VC}{VE}=\frac{(x+r)(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$.

La superficie laterale è: $S=\pi\cdot AH\cdot VA=\cdots=\pi\, r\,\frac{x^2+3rx+2r^2}{x}$. Questa espressione è minima se lo è: y=$\frac{x^2+3rx+2r^2}{x}$; la derivata è data da: $y'=\frac{x^2-2r^2}{x^2}\geq 0$ per $x^2\geq 2r^2$, cioè, data la limitazione della x, $x>r\sqrt{2}$; quindi la funzione è crescente per tali x e decrescente per $0<x<r\sqrt{2}$ e pertanto in $x=r\sqrt{2}$ ha il minimo, come richiesto.

Con la collaborazione di Angela Santamaria