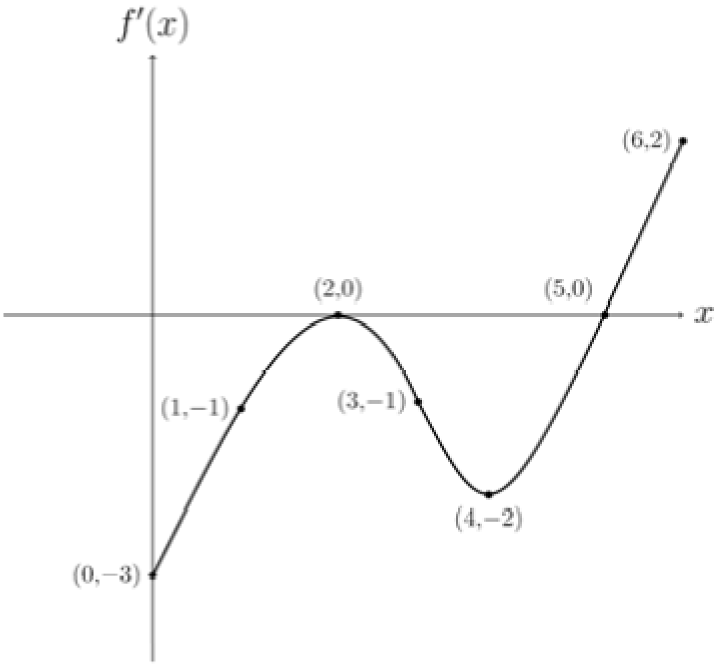
PNI 2012 - PROBLEMA 1

1



Essendo f '(x) crescente negli intervalli [0;2] e [4;6], in tali intervalli la f '' è positiva (quindi f avrà la concavità verso l'alto).
Risulta f ' (x) decrescente nell'intervallo [2;4] e quindi in tale intervallo la f '' è negativa (quindi f avrà la concavità verso il basso).
Pertanto la f avrà un flesso in x=2 (a tangente orizzontale poiché f '(2)=0) ed un altro flesso in x=4 (con tangente inflessionale di coefficiente angolare -2, poiché f ' (4)=-2.

2)

Dal grafico della f ' si deduce che la f decresce da 0 a 5 (f ' negativa o nulla) e cresce da 5 a 6 (f ' positiva): pertanto f avrà il suo minimo assoluto in x=5 (ed il massimo assoluto sarà in x=0 oppure in x=6).

$$\int_0^6 f'(t)dt = \left[f(x)\right]_0^6 = f(6) - f(0) = -5 \quad \Rightarrow f(6) = f(0) - 5 = 9 - 5 = 4$$

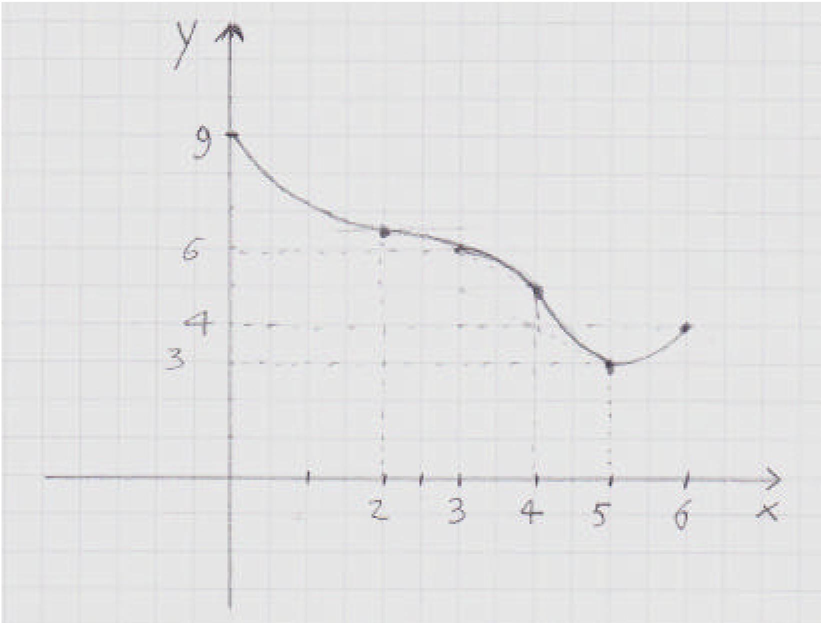
Poiché f(0)=9, segue che il massimo assoluto si ha in x=0.

3)

In base a quanto detto nei punti precedenti la funzione f ha le seguenti caratteristiche:

- parte dal punto (0;9), decresce con la concavità verso l'alto fino ad x=2, dove presenta un flesso a tangente orizzontale. In x=3 vale 6.
- Da x=2 a x=4 decresce con la concavità verso il basso ed in x=4 ha un flesso con tangente in flessionale di coefficiente angolare -2.
- Da x=4 a x=5 decresce con la concavità verso l'alto ed in x=5 ha il minimo assoluto che vale 3,
- Da x=5 a x=6 cresce con la concavità verso l'alto fino a raggiungere il valore 4.

Il grafico della f sarà del tipo



4)

g(x)=x f(x)

La tangente al grafico di f in x=3 è:

y-f(3) = f '(3)(x-3) ➔ y-6=-1(x-3) ➔ y=-x+9

Per la tangente al grafico di g in x=3 notiamo che g(3) = 3 f(3) = 18 ; m=g'(3), quindi calcoliamo la derivata di g:

g '(x)=(xf(x))'= f(x)+xf '(x) ➔ g'(3)=f(3)+3f '(3)=6-3=3. La tangente per la g risulta quindi:

y-18=3(x-3) ➔ y=3x+9

Detto α l'angolo acuto formato dalle due rette e indicati con m ed m' i loro coefficienti angolari, risulta:

$tg\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| = \left|\frac{3+1}{1-3}\right| = 2$. Quindi $\alpha = arctg(2) \cong 63.435° \cong 63°26'$