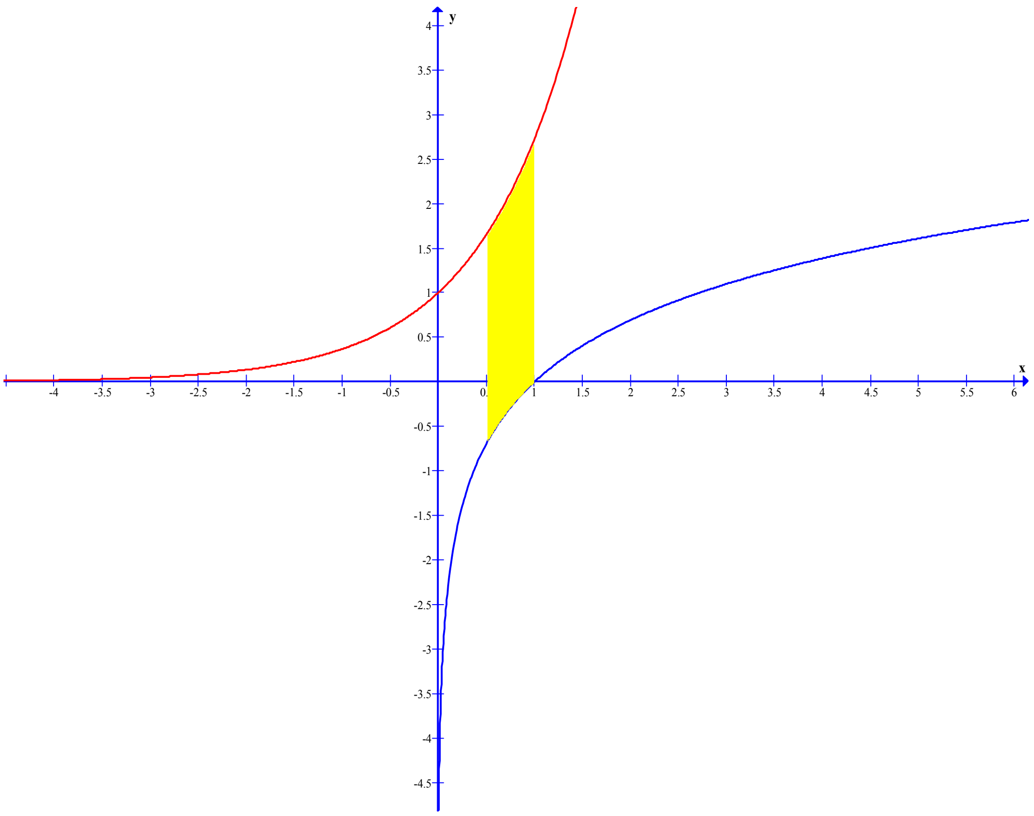
PNI 2012 - PROBLEMA 2

1)



L'area della regione R si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(e^x - \ln x)dx = \left[e^x - (x\ln x - x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = e - e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} \cong 1.22$$

(l'integrale di lnx si calcola per parti).

2)

Il volume generato dalla rotazione di R attorno all'asse x, essendo la regione delimitata dall'asse x, da g e dalle rette x=1/2 e x=1 contenuta nella regione delimitata dall'asse x, da f e dalle stesse rette, equivale al volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x dalla regione delimitata dall'asse x, da f e dalle rette x=1/2 e x=1. Tale volume quindi si calcola mediante l'integrale:

$$V(T) = \pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(f(x))^2\,dx = \pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{2x}dx = \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{2}(e^2 - e) \cong 7.337$$

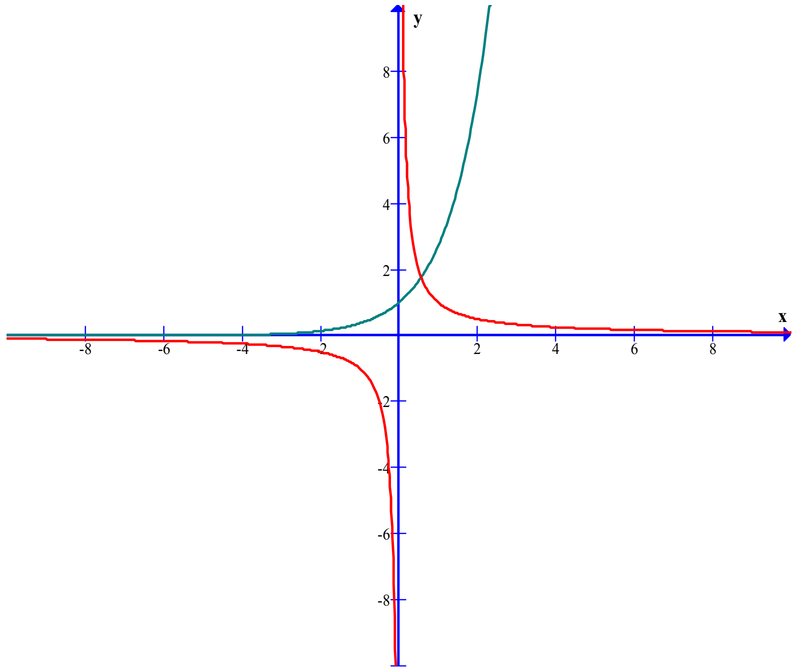
Il volume di T si ottiene con un unico integrale utilizzando il cosiddetto metodo dei “gusci cilindrici” (somma di infiniti cilindri infinitesimi “cavi” (… i gusci cilindrici) di altezza f(x)-g(x), raggio esterno x+dx e raggio interno x, somma estesa all’intervallo in questione).

$$V(T) = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(f(x) - g(x))dx = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(e^x - \ln x))dx$$

Integrando per parti si ottiene il valore: $\frac{\pi}{8}\left(8\sqrt{e} + 3 - 2\ln 2\right) \cong 5.813$

3)

Le rette r ed s sono parallele se $f'(x_0) = g'(x_0)$, e questo avviene quando $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$. Confrontando graficamente le due funzioni $y = e^x$ e $y = \frac{1}{x}$ (vedi figura seguente), si verifica che esiste un solo punto che soddisfa la richiesta (in $x = \frac{1}{2}$ è maggiore $\frac{1}{x}$, in $x = 1$ è maggiore e^x, quindi $\frac{1}{2} < x_0 < 1$).

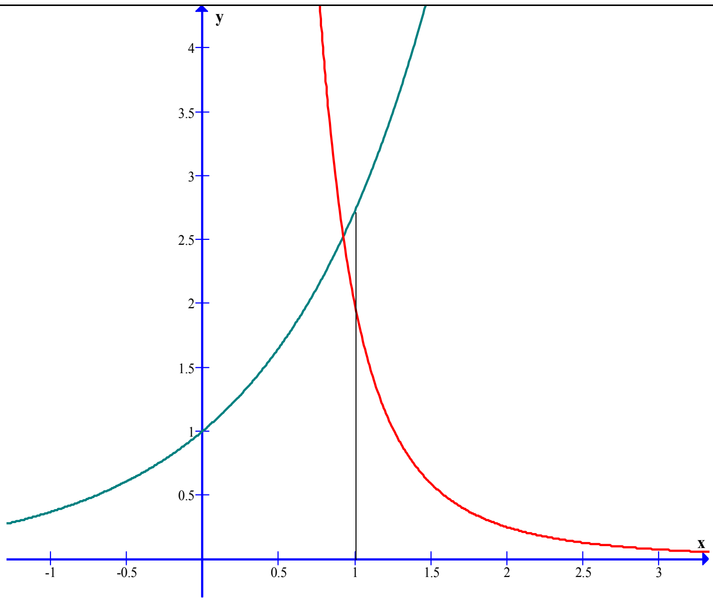


Per calcolare un’approssimazione arrotondata ai centesimi di x_0 consideriamo la funzione seguente:

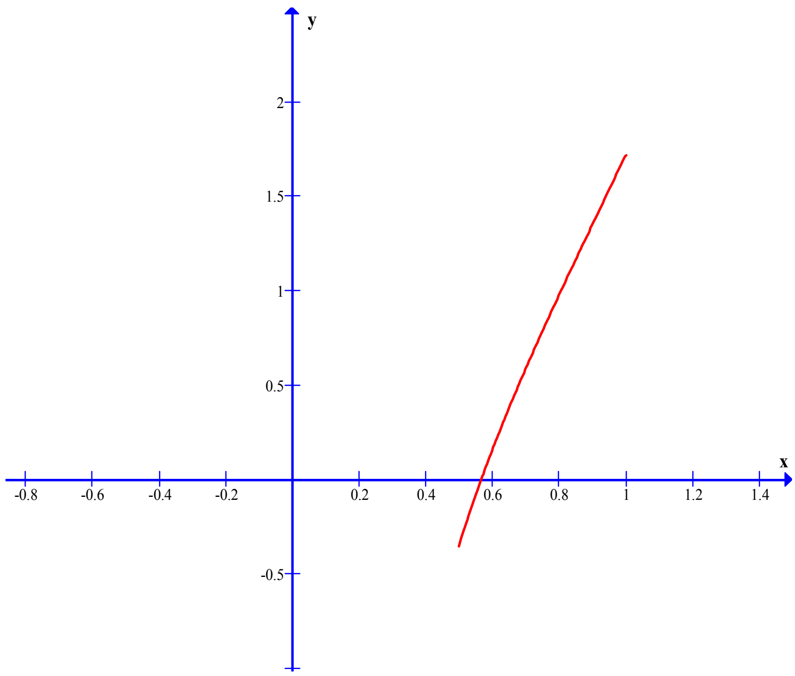
$F(x) = e^x - \frac{1}{x}$, nell’intervallo $\left[\frac{1}{2};1\right]$ e notiamo che $F\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ e che $F(1) > 0$. Risulta:

$F'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ per ogni x (la funzione è quindi crescente)

$F''(x) = e^x - \frac{2}{x^3} < 0$ nell’intervallo richiesto (vedi figura seguente)



Applichiamo per esempio il metodo delle tangenti alla funzione F(x) nell'intervallo richiesto (con punto iniziale ½).



$x \leftarrow x - \dfrac{F(x)}{F'(x)}$. Otteniamo il valore approssimato a meno di un centesimo (per difetto) **0.56**

4)

$h(x) = f(x) - g(x) = e^x - \ln x$; dobbiamo cercare il minimo ed il massimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. La funzione in questione è continua nell'intervallo chiuso e limitato indicato, quindi potremmo utilizzare teorema di Weierstrass per trovare il massimo ed il minimo assoluti; visto quanto già studiato nel punto precedente è più semplice studiare il segno della derivata prima.

$h'(x) = e^x - \frac{1}{x} > 0$ per $x_0 < x < 1$: in tale intervallo la funzione h(x) è quindi crescente; segue che è decrescente nell'intervallo $\frac{1}{2} < x < x_0$, pertanto il minimo assoluto si ha in x_0.

Per il massimo assoluto basta confrontare i valori assunti negli estremi dell'intervallo:

$h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} + \ln 2 \cong 2.34$, $h(1) = e > 2.34$, quindi il massimo assoluto si ha per x=1.