PNI 2013

QUESITO 1

L'area del triangolo può essere calcolata in funzione di due lati e del seno dell'angolo compreso:

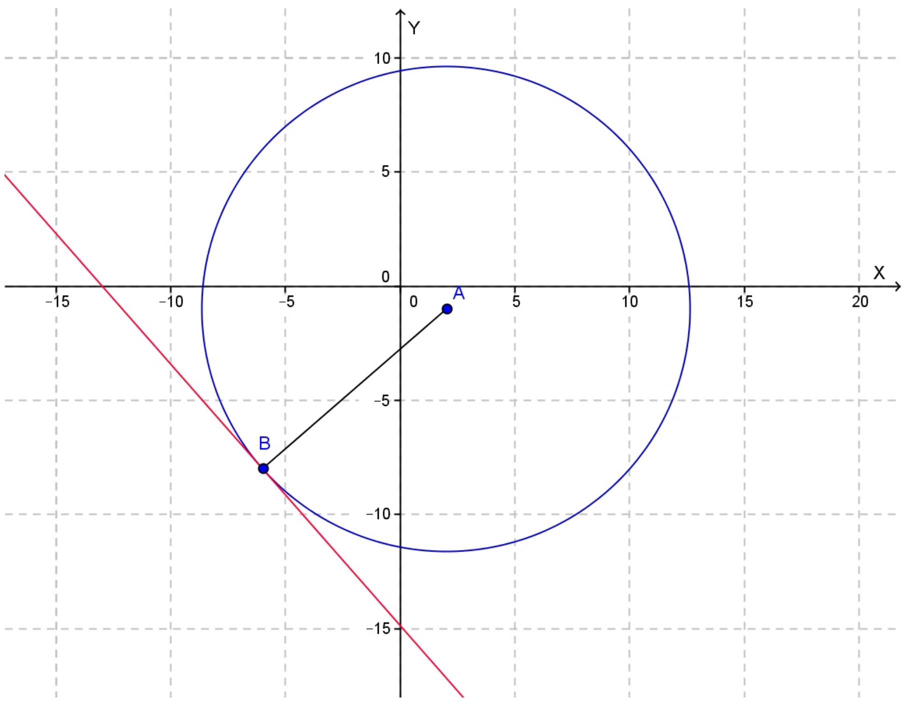
$A = \frac{2 \cdot 3 \cdot sen\alpha}{2} = 3$, da cui $sen\alpha = 1$, quindi $\alpha = \frac{\pi}{2}$. I triangolo è quindi rettangolo con cateti 2 e 3. Il terzo lato è l'ipotenusa che misurerà $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

QUESITO 2

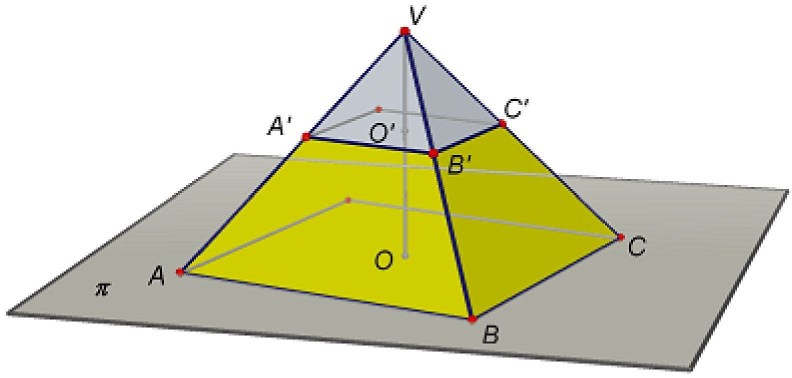
Per ipotesi
f '(1)-2f '(2)=5 (A)
f '(2)-2 f '(4)=7 (B). Dobbiamo calcolare il valore di f '(x)-4 f '(4x) in x=1, cioè f ' (1) – 4f '(4).
A+2B: f ' (1) – 4 f '(4)= 5+14=19.

QUESITO 3

A=(2;-1), B=(-6;-8).
La retta richiesta è la perpendicolare alla retta AB in B ed ha equazione **8x+7y+104=0**



QUESITO 4



Per trovare il volume del tronco di piramide si sottrae al volume della piramide VABCD quello della piramide VA'B'C'D'.
Pongo VO' = x, O'O=h (l'altezza del tronco), quindi VO=h+x.
Per similitudine si ha: $\frac{VO'}{VO}=\frac{b}{a}$ (a è il lato della base maggiore) da cui ricavo $x=\frac{bh}{a-b}=VO'$

VH=h+x=$\frac{ah}{a-b}$. Il volume del tronco è dato quindi da:
$\frac{1}{3}a^2\frac{ah}{a-b}-\frac{1}{3}b^2\frac{bh}{a-b}=\frac{1}{3}h\left(a^2+b^2+ab\right)$.

QUESITO 5

Supponiamo per semplicità che il corpo abbia la forma di un parallelepipedo di dimensioni a, b, c.
Il suo volume è V=abc. Supponiamo che le sue dimensioni lineari si dilatino del k%; il nuovo volume V' sarà (a+ka)(b+kb)(c+kc)= abc(1+k)^3
Quindi la variazione percentuale del volume è dato da:
$\frac{V'-V}{V}=\frac{\mathrm{abc}(1+\mathrm{k})^3-abc}{abc}=(1+k)^3-1=3k+3k^2+k^3\cong 3k$ poiché per k "piccolo" k^2 e k^3 sono "trascurabili".
Per esempio con k=0,38 (aumento dello 0.38%) risulta
$\frac{V'-V}{V}=(1+0{,}0038)^3-1\cong 3\cdot 0{,}0038\cong 0{,}0114=1{,}14\%$.
Analogamente per la superficie:
S=ab; S'=(a+ka)(b+kb)= ab(1+k)^2
$\frac{S'-S}{S}=\frac{\mathrm{ab}(1+\mathrm{k})^2-ab}{ab}=(1+k)^2-1=2k+k^2\cong 2k$

con k=0,38 la superficie aumenta dello 0,76%.

QUESITO 6

I 6 numeri più grandi si ottengono da 7654321 permutando le ultime 3 cifre (3!=6).
Al posto n. 5040 abbiamo 7654321
Al posto n. 5039 abbiamo 7654312
Al posto n. 5038 abbiamo 7654231

Al posto n. 5037 abbiamo 7654213
Al posto n. 5036 abbiamo 7654132

Con 1 al primo posto abbiamo 6!=720 numeri, con 2 al primo posto altri 720; **il numero di posto 1441** è il più piccolo che inizia con 3, cioè **3124567.**

QUESITO 7

Su 10 persone 4 non hanno gli occhi azzurri. Le coppie favorevoli sono in numero pari alle combinazioni di 4 oggetti a 2 a 2, cioè $\binom{4}{2}$; le coppie possibili sono $\binom{10}{2}$. Quindi la probabilità richiesta è data da:

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$$

QUESITO 8

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{senx} - e^{sen\pi x}}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{e^{sen(\pi-x)} - 1}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} - \frac{e^{sen(\pi-x)} - 1}{\pi - x} = -1.$$

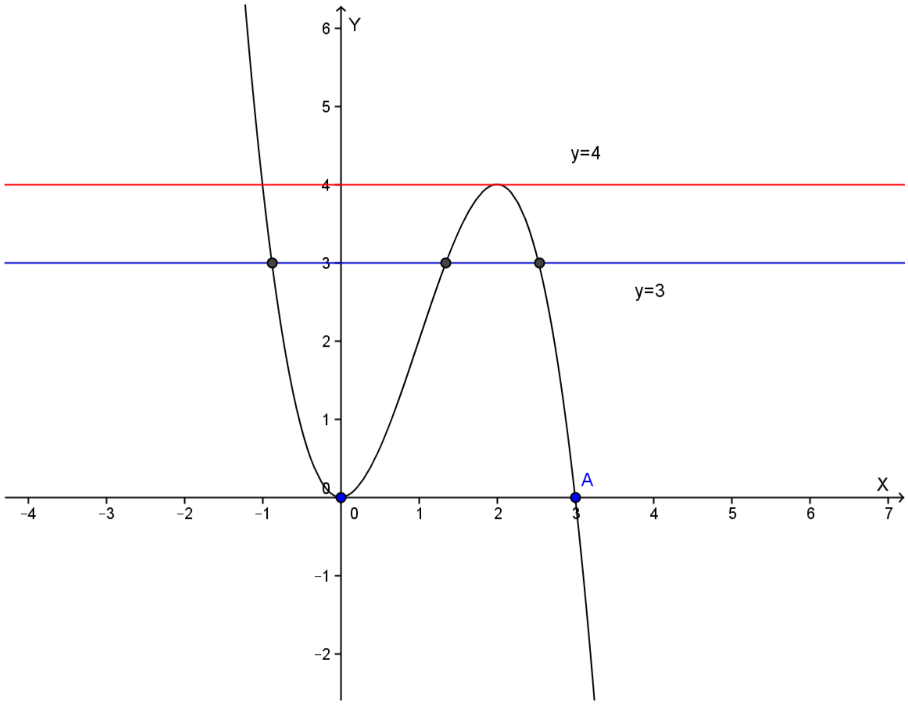
Si ricordi che se $f(x) \to 0$ allora $\frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} \to 1$

QUESITO 9

Anna ha torto perchè due insiemi infiniti non sono necessariamente equipotenti; infatti l'insieme dei numeri razionali è numerabile, quello degli irrazionali no (ha la potenza del continuo).
Anche Paolo ha torto, perché gli irrazionali "sono di più" dei razionali dato che la potenza del continuo supera la potenza del numerabile ; ha quindi ragione Luisa.

QUESITO 10

La funzione di equazione $y = x^2(3-x)$ è una cubica che ha un massimo in (2;4). Dal grafico seguente si deduce che l'equazione data ha due soluzioni distinte nell'intervallo [0;3] per $0 \le k < 4$



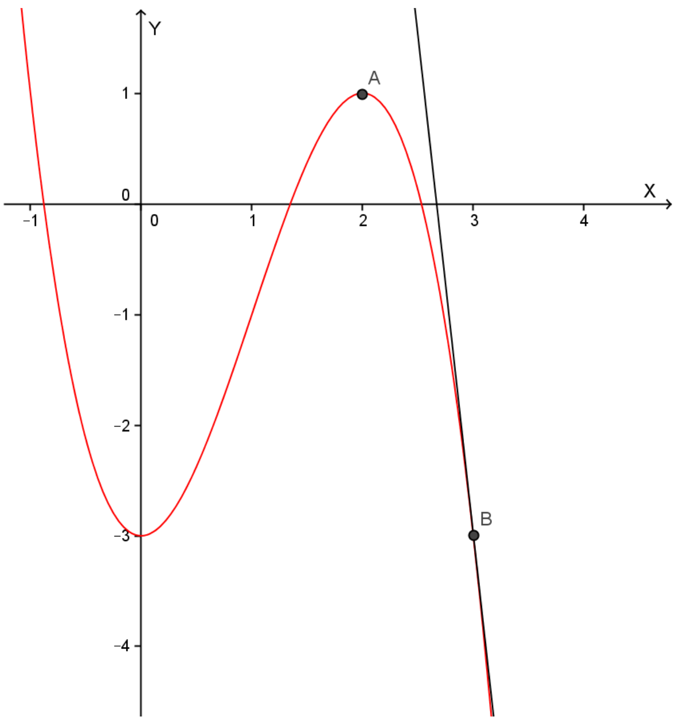
Con k=3 la soluzione maggiore è compresa tra 2 e 3.
Consideriamo la funzione di equazione

$y = f(x) = x^2(3-x)-3 = -x^3+3x^2-3$

Essa ammette un solo zero nell'intervallo [2;3] e risulta f(2)=1 ed f(3)=-3.
Calcolo la derivata seconda per vedere se posso applicare il metodo delle tangenti.

$y' = -3x^2+6x$

$y'' = -6x+6>0$ per x<1, quindi nell'intervallo [2;3] ha segno costante (negativo): possiamo quindi applicare il metodo delle tangenti.



Siccome f(a)*f ''(x)<0 assumiamo come punto iniziale b=3

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} \cong 2.66666$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \cong 2.5486$$

Così procedendo si arriva al valore approssimato con due cifre decimali che è **2.53** (per difetto).

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Simona Scoleri