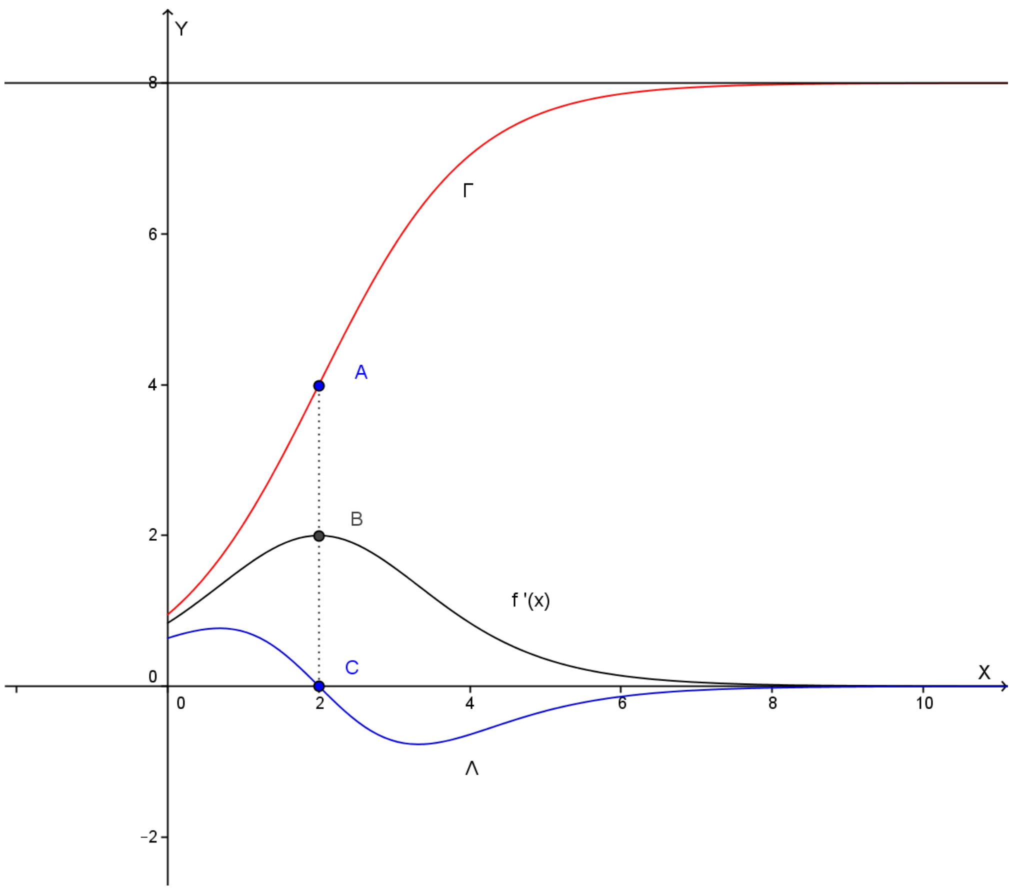
PNI 2013 - PROBLEMA 1

1)

La f ''(x) è positiva da 0 a 2 e negativa per x>2, quindi la f '(x) è crescente da 0 a 2 e decrescente per x>2; perciò in x=2 ha un massimo. Il massimo ha ordinata f '(2) che è il coefficiente angolare della tangente al grafico di f in (2,4); siccome tale tangente passa per l'origine, il suo coefficiente angolare è 4/2=2: quindi il massimo di f ' ha coordinate **(2;2).**

Per il grafico di f ' (x), oltre a quanto osservato sopra, notiamo che il limite per x che tende a + infinito è 0^+, come si deduce dall'andamento della f che ha un asintoto orizzontale per x che tende a + infinito.
I grafici delle tre funzioni possono essere così rappresentati:



2)

La popolazione ha un valore iniziale pari a 1 u e cresce nel tempo x indefinitamente senza mai raggiungere il valore di 8 u. La velocità di variazione nel tempo x è data dalla derivata prima, che cresce fino a x=2 e decresce da 2 in poi, tendendo a zero (quindi la popolazione tende a non crescere) quando il tempo tende all'infinito.
La presenza dell'asintoto orizzontale può indicare che con le risorse disponibili la quantità massima di

abitanti raggiungibile è 8u.
La presenza di un flesso può indicare che la mancanza di risorse induce un rallentamento progressivo della crescita di popolazione.

3)

Per trovare l'equazione di f (x) dobbiamo imporre le condizioni f(2)=4 ed f '(2)=2.

Teniamo presente che risulta: $f'(x) = \dfrac{a \cdot e^{b-x}}{(1+e^{b-x})^2}$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} = 4 \\ \dfrac{a \cdot e^{b-2}}{\left(1+e^{b-2}\right)^2} = 2 \end{cases}$$

dividendo membro a membro la prima e la seconda equazione otteniamo : $1+e^{b-2} = 2e^{b-2}$, da cui $e^{b-2} = 1$, quindi **b=2.**
Sostituendo b=2 nella seconda equazione otteniamo **a=8.**

La funzione f ha equazione: $f(x) = \dfrac{8}{1+e^{2-x}}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{8 \cdot e^{2-x}}{\left(1+e^{2-x}\right)^2}$

4)

L'area richiesta è data da:

$$\int_0^2 f''(x)dx = [f'(x)]_0^2 = f'(2) - f'(0) = 2 - \frac{8 \cdot e^2}{(1+e^2)^2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Simona Scoleri