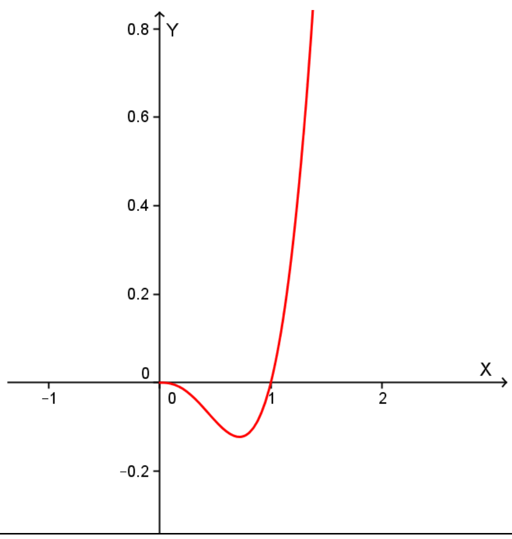
PNI 2013 - PROBLEMA 2

1)

$f(x)=x^3 \ln x$

- Dominio: $0<x<+\infty$
- Per y=0 otteniamo ln x=0 da cui x=1
- y>0 quando ln x>0 cioè per x>1
- La funzione, visto il dominio, non può essere né pari né dispari
- Il limite a zero + è zero -; il limite al +infinito è + infinito
- Per x che tende a +infinito f(x)/x tende a + infinito, quindi non c'è asintoto obliquo.
- $y'=3x^2 \ln x+x^2=x^2(3\ln x+1)$: il suo dominio coincide con quello della f.
- y'=0 quando lnx = - 1/3 quindi $per \quad x=e^{-\frac{1}{3}}$, y' > 0 $per \quad x>e^{-\frac{1}{3}}$, quindi la funzione è crescente da 0 fino ad $x=e^{-\frac{1}{3}} \cong 0.717$, decrescente $per \quad x>e^{-\frac{1}{3}}$. Abbiamo quindi un minimo $x=e^{-\frac{1}{3}}$, la cui ordinata vale $y=-\frac{1}{3e}$
- $y''=x(6\ln x+5)$
- y'' = 0 quando lnx=-5/6 quindi $per \quad x=e^{-\frac{5}{6}} \cong 0.435$; y''>0 $per \quad x>e^{-\frac{5}{6}}$, quindi abbiamo la concavità verso il basso da 0 a $x=e^{-\frac{5}{6}}$, la concavità verso l'alto $per \quad x>e^{-\frac{5}{6}}$. C'è un flesso $per \quad x=e^{-\frac{5}{6}}$ con ordinata $y=-\frac{5}{6e^2\sqrt{e}}$.
- Notiamo che per x che tende a zero + la derivata prima tende a zero -, quindi la curva si avvicina all'origine con tangente orizzontale.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



2)

P=(1;0), $y = ax^2 + bx + c$, passante per O e tangente in P a γ.
f '(1)=1= m della tangente in P a γ (e quindi anche alla parabola); la tangente in P ha quindi equazione y = x – 1.

Imponendo il passaggio per O e per P e che la derivata prima della parabola in x=1 sia 1 otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$ che porta alla soluzione **a=1, b=-1 e c=0.**

La parabola ha quindi equazione $y = x^2 - x$

3)

L'area della regione R si calcola mediante il seguente integrale (improprio, perché in x=0 la funzione non è continua):

$A(R) = -\int_0^1 x^3 \ln x dx = -\lim_{k \to 0^+} \int_k^1 x^3 \ln x dx =$ .... integrando per parti

$$A(R) = -\lim_{k \to 0^+} \left[\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} \right]_k^1 = -\lim_{k \to 0^+} \left[-\frac{1}{16} - \frac{k^4}{4} \ln k + \frac{k^4}{16} \right] = \frac{1}{16}$$

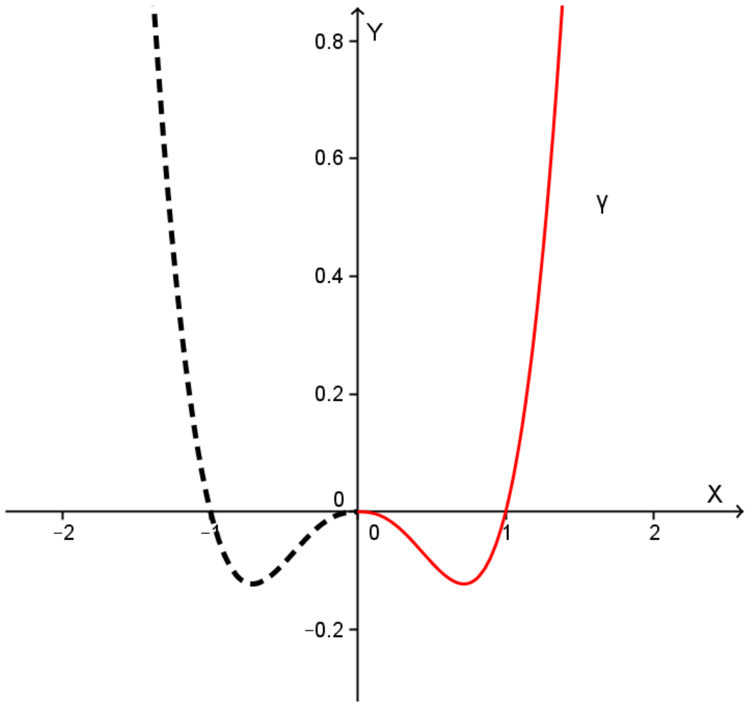
$$A(R) = \frac{1}{16} dm^2 = \frac{1}{16} \cdot 10^4 mm^2 = 625\ mm^2$$

4)

La simmetrica di γ rispetto all'asse y si ottiene mediante la seguente trasformazione geometrica:

$$\begin{cases} x \to -x \\ y \to y \end{cases}$$

L'equazione della f, $y = x^3 \ln x$, si trasforma in $y = -x^3 \ln(-x)$.
Il suo grafico è rappresentato in tratteggio nero insieme al grafico di γ, rappresentato in tratto continuo rosso.

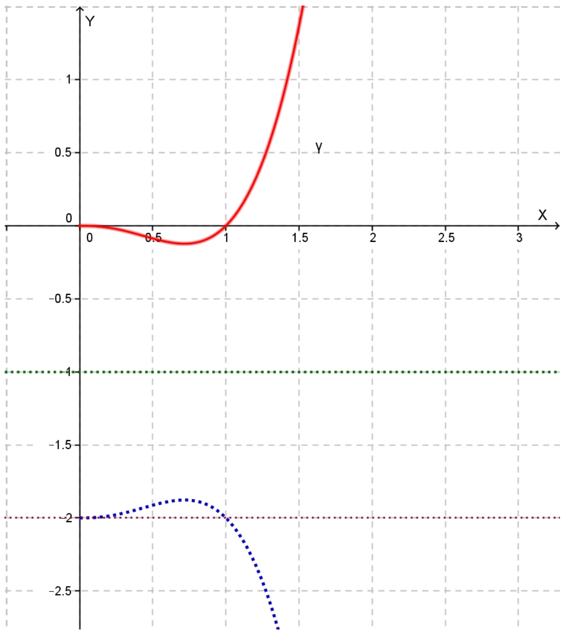


La simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione y = -1 si ottiene mediante la seguente trasformazione geometrica:

$$\begin{cases} x \to x \\ y \to -2 - y \end{cases}$$

L'equazione della f, $y = x^3 \ln x$, si trasforma in $-2 - y = x^3 \ln x$ che diventa $y = -x^3 \ln x - 2$

Il suo grafico è rappresentato in tratteggio blu insieme al grafico di γ, rappresentato in tratto continuo rosso e all'asse di simmetria.



Con la collaborazione di Angela Santamaria e Simona Scoleri