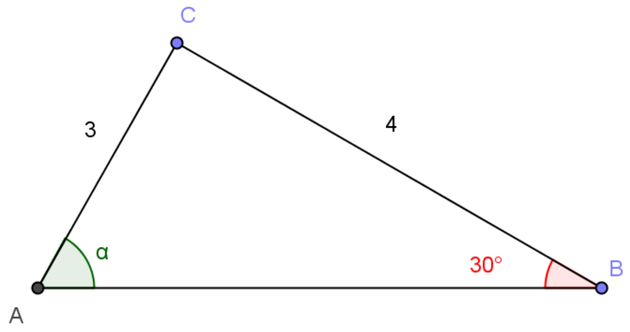
PNI 20014

QUESITO 1



Per il teorema dei seni risulta: $\frac{4}{sen\,\alpha} = \frac{3}{sen\,30°}$ da cui $sen\,\alpha = \frac{2}{3}$

Quindi $\alpha = arcsen\left(\frac{2}{3}\right)$ che porta alle due soluzioni:

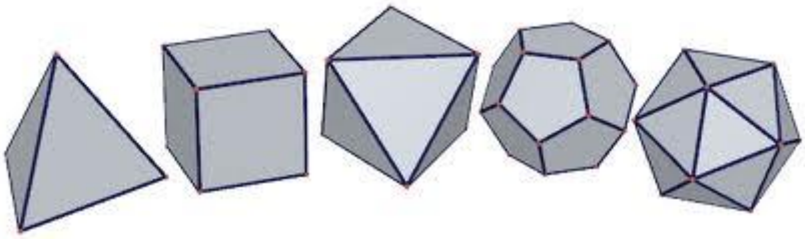
$\alpha_1 \cong 41{,}810° \cong 41°49'$ $\quad \alpha_2 \cong 138°11'$

QUESITO 2

I poliedri regolari (**solidi platonici**) sono **5**, e tra essi **non ce ne sono a facce esagonali**.
Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.
Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).
Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno 120°x3=360°, quindi **non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.**

Si hanno infatti le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce degli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°): in questo caso si ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).



QUESITO 3

Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:

- *esattamente una pallina è rossa*
- *le tre palline sono di colori differenti.*

R=5, V=5, G=5, B=5

Probabilità che esattamente una su tre sia rossa.

Le rosse sono 5, le altre due, non rosse, sono le combinazioni di 15 oggetti (V+G+B) a due a due.
Casi favorevoli = $5 \cdot C_{15,2} = 5 \cdot \binom{15}{2} = 5 \cdot 105 = 525$
I casi possibili sono le combinazioni di 20 oggetti (tutte le palline) a 3 a 3.
Casi possibili: $C_{20,3} = \binom{20}{3} = 1140$

P(una sola rossa) = $\frac{525}{1140} = \frac{35}{76} \cong 46\%$

Secondo metodo

La probabilità che la prima pallina estratta sia rossa è $\frac{5}{20}$.
La probabilità che la seconda pallina sia NON ROSSA è $\frac{15}{19}$.
La probabilità che la terza pallina estratta sia NON ROSSA è $\frac{14}{18}$.
La probabilità che sia rossa SOLO la prima pallina è quindi: $\frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18}$.
Siccome la pallina rossa può essere SOLO la prima o SOLO la seconda o SOLO la terza, la probabilità richiesta è: $3 \cdot \left(\frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18}\right) = \frac{35}{76}$

Probabilità che le tre palline siano di colori differenti.

p(3 rosse)= p(3 verdi) = p(3 gialle) = p(3 bianche) =

$$\frac{C_{5,3}}{C_{20,3}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{10}{1140}$$

p(1 di un colore e 2 dell'altro colore) = $4 \cdot \frac{(5 \cdot (3 \cdot C_{5,2}))}{C_{20,3}} = 60 \cdot \frac{10}{1140} = \frac{10}{19}$

La probabilità richiesta è quindi :

$$1 - \frac{10}{1140} \cdot 4 - \frac{10}{19} = 1 - \frac{2}{57} - \frac{10}{19} = \frac{25}{57} \cong 44\%$$

Secondo metodo

La probabilità che la prima pallina sia rossa è: $\frac{5}{20}$.
La probabilità che la seconda NON SIA ROSSA: $\frac{15}{19}$.
La probabilità che la terza pallina NON SIA ROSSA NE' DEL SECONDO COLORE USCITO è: $\frac{10}{18}$.
Quindi la probabilità che si abbiano tre colori diversi con la prima rossa è: $\frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{10}{18}$.
Siccome la prima pallina può essere di **quattro** colori diversi, la probabilità richiesta è:

$$4 \cdot \left(\frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{10}{18}\right) = \frac{25}{57}$$

QUESITO 4

Il solido in questione può essere visto come somma di infiniti rettangoli di dimensioni f(x) ed h(x), quindi il suo volume si ottiene calcolando il seguente integrale:

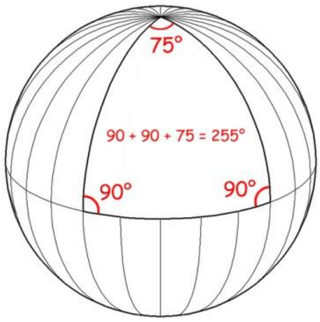
$$V = \int_{-2}^{-1} f(x)h(x)dx = \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\left[\int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx\right] =$$

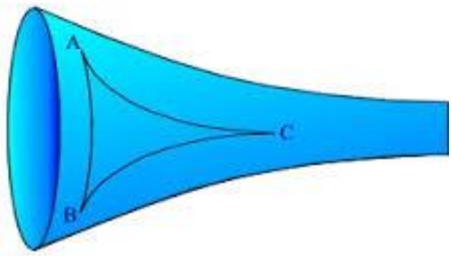
$$= -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{-2}^{-1} = -\left(e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} \cong 0.239\ u^3$$

QUESITO 5

Il teorema euclideo in base al quale la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°, nelle geometrie non euclidee, per la diversa nozione di piano che ne sta alla base, viene modificato in questi termini. Per la geometria di Riemann quella somma è sempre maggiore di 180°; per quella di Lobacevskij essa è sempre minore di 180°.

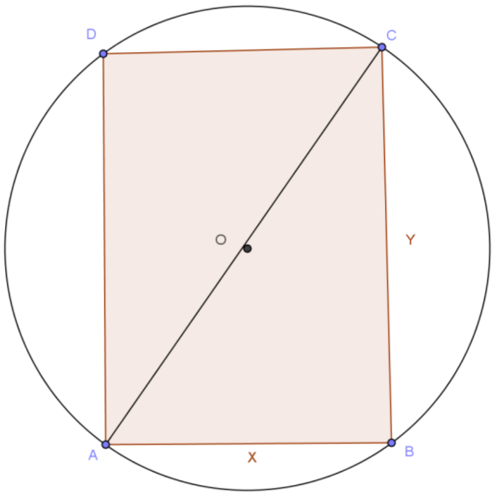
La cosa non risulterà difficile se si considera un triangolo una volta disegnato su una superficie sferica (geometria di Riemann) e una volta disegnato sulla superficie esterna di una trombetta (secondo il modello della geometria di Lobacevskij); in entrambi i casi avremo un triangolo con lati curvilinei.





Approfondimento sulle geometrie non euclidee
http://www.matefilia.it/argomen/euclide/sommario.htm

QUESITO 6



Indicando con x il diametro di base del cilindro, con y la sua altezza e con R il raggio della sfera, si ha:

$x^2 + y^2 = 4R^2$ (*)

Il volume del cilindro è $V = \pi \frac{x^2}{4} y = \max$ se lo è $x^2 y = x^2 (y^2)^{\frac{1}{2}}$: essendo il prodotto di due potenze (positive) di grandezze a somma costante (x^2 e y^2), il massimo si avrà quando le basi sono proporzionali agli esponenti, cioè $\frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{\frac{1}{2}}$ che equivale a $x^2 = 2y^2$.

Sostituendo nella (*) si ottiene $y = \frac{2}{\sqrt{3}} R = 2$ e $x = \sqrt{2} y = 2\sqrt{2}$.

Il cilindro di volume massimo avrà quindi: raggio di base (x/2) uguale a $\sqrt{2}$ e altezza (y) uguale a 2.

Con l'uso delle derivate:

Da $x^2 + y^2 = 4R^2$ si ricava $x^2 = 4R^2 - y^2$, quindi:

$V = \pi \frac{x^2}{4} y = \pi \frac{(4R^2 - y^2)}{4} y$, che è massimo se lo è:

$\boldsymbol{z = y(4R^2 - y^2)}$**, con** $\boldsymbol{0 \le y \le 2R}$

$z' = 4R^2 - 3y^2 \ge 0,$
$0 \le y \le \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ ossia (essendo $R = \sqrt{3}$), $0 \le y \le 2$

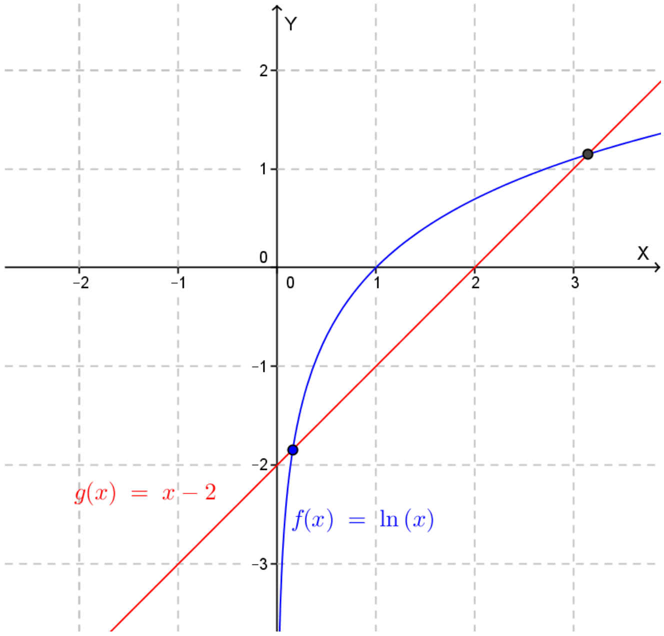
Quindi z è crescente per $0 \le y \le 2$ e decrescente per $2 \le y \le 2\sqrt{3}$
Pertanto z (e quindi anche V) è massima quando l'altezza vale 2; il raggio di base (x/2) vale $\sqrt{2}$.

QUESITO 7

$\boldsymbol{f'(x) = \ln x - x + 2}$

Studiamo graficamente il segno della derivata:

$\boldsymbol{\ln x - x + 2 > 0 \implies \ln x > x - 2}$



Risulta $\boldsymbol{ln\,x > x - 2}$ per $a < x < b$ con $0 < a < 1$ e $3 < b < 4$

Quindi la funzione è crescente per $a < x < b$

e decrescente per $0 < x < a$ e $x > b$

Pertanto la **f ha un minimo relativo per** $\boldsymbol{x = a \cong 0,159}$ (risposta D)

(ed un massimo per $x = b \cong 3{,}146$).

QUESITO 8

I casi possibili nel lancio di tre dadi sono 6x6x6=216.

I casi favorevoli che danno 9 sono

dado 1	dado 2	dado 3	n. casi
1	2-3-4-5-6	6-5-4-3-2	5
2	1-2-3-4-5-6	6-5-4-3-2-1	6
3	1-2-3-4-5	5-4-3-2-1	5
4	1-2-3-4	4-3-2-1	4
5	1-2-3	3-2-1	3
6	1-2	2-1	2
Totale casi favorevoli con somma 9			25

Quindi la probabilità di ottenere 9 è $\boldsymbol{p(9) = \frac{25}{216} \cong 0.116 \cong 11.6\%}$

I casi favorevoli che danno 10 sono

dado 1	dado 2	dado 3	n. casi
1	3-4-5-6	6-5-4-3	4
2	2-3-4-5-6	6-5-4-3-2	5
3	1-2-3-4-5-6	6-5-4-3-2-1	6
4	1-2-3-4-5	5-4-3-2-1	5
5	1-2-3-4	4-3-2-1	4
6	1-2-3	3-2-1	3
Totale casi favorevoli con somma 10			27

Quindi la probabilità di ottenere 10 è $\boldsymbol{p}(\mathbf{10}) = \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{216}} = \mathbf{0.125} \cong \mathbf{12.5}\%$

Quindi $\boldsymbol{p}(\mathbf{9}) < \boldsymbol{p}(\mathbf{10})$.

QUESITO 9

Gli insiemi Z e Q hanno la stessa cardinalità di N (si dice anche che sono equipotenti), mentre R ha cardinalità superiore: la potenza del continuo (come dimostrato da Cantor).

Ciò vuol dire che Z e Q possono essere posti in corrispondenza biunivoca con N, mentre R no.

La corrispondenza biunivoca tra Z ed N si può facilmente verificare associando gli elementi della prima riga con quelli corrispondenti nella seconda riga:

0, 1, 2, 3, 4, ………..
0, +1, -1, +2, -2,

La corrispondenza biunivoca tra Q ed N è stata dimostrata da **Cantor** (primo metodo diagonale).

La NON corrispondenza biunivoca tra R ed N è stata dimostrata anch'essa da **Cantor** (secondo metodo diagonale).

Approfondimento

ftp://ftp.dii.unisi.it/pub/users/pnistri/am1_12-13/Appunti anni precedenti/potenza insiemi numerici.pdf

QUESITO 10

Dobbiamo trovare a e b in modo che sia

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-2}{x}=1$$

Deve essere $\sqrt{a}-2=0$, altrimenti il limite sarebbe infinito; quindi $\sqrt{a}=2$, $\boldsymbol{a=4}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+\frac{bx}{4}}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{bx}{4}}-1\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{bx}{4}}-1\right)}{\frac{bx}{4}}\cdot\frac{b}{4}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{4}=\frac{b}{4}=1\quad se\quad \boldsymbol{b=4}$$

N.B.

E' stato usato il seguente limite notevole:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$$

ma si può arrivare al risultato anche razionalizzando il numeratore:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+bx}-2\right)\left(\sqrt{4+bx}+2\right)}{x\cdot\left(\sqrt{4+bx}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4+bx-4}{x\cdot\left(\sqrt{4+bx}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{bx}{x\cdot\left(\sqrt{4+bx}+2\right)}=\frac{b}{4}=1\qquad se\qquad b=4$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri