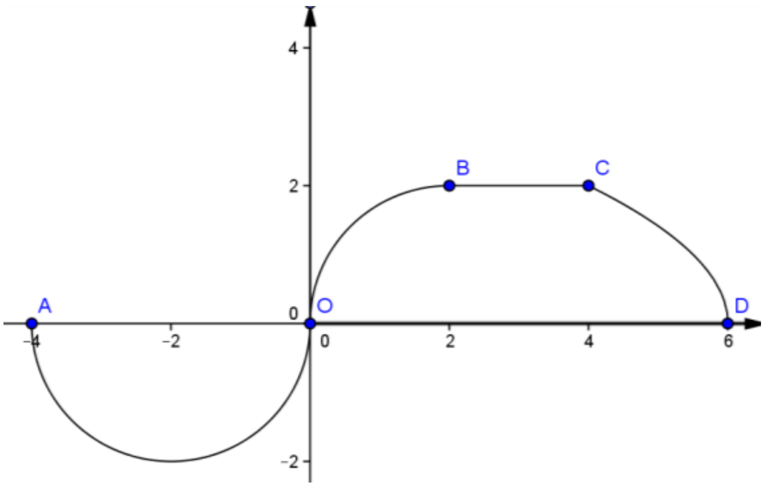
PNI 2014 - PROBLEMA 1

Sia *g(x)* una funzione continua sull'intervallo chiuso [-4; 6]. Il grafico di *g(x)*, disegnato a lato, passa per i punti A(- 4;0), O(0;0), B(2;2), C(4;2), D(6;0) e consiste della semicirconferenza di diametro AO, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse *x* .



1)

Si dica, giustificando la risposta, se g/x) è derivabile nei punti A, O, B, C, D.

In A NON DERIVABILE: tangente (destra) verticale, derivata destra – infinito.
In O NON DERIVABILE: tangente verticale, derivata destra = + infinito = derivata sinistra (abbiamo un flesso a tangente verticale)
In B DERIVABILE: tangente destra e sinistra orizzontali, derivata nulla.
In C NON DERIVABILE: tangente sinistra orizzontale, tangente destra con coefficiente angolare negativo (punto angoloso).
In D NON DERIVABILE: tangente (sinistra) verticale, derivata - infinito

2)

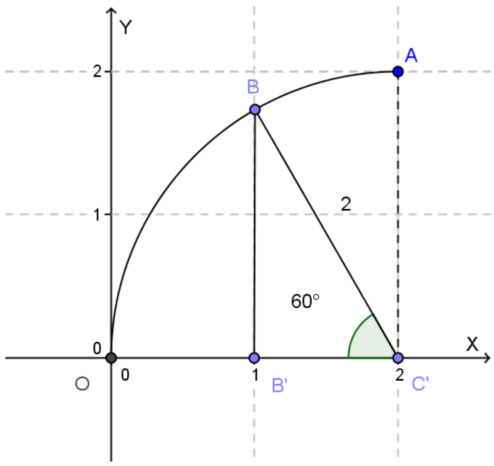
Sia: $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$. *Calcolare: f(-4), f(0), f(1), f(2), f(4), f(6).*

$$f(-4) = \int_{-4}^{-4} g(t)dt = 0$$

$$f(0) = \int_{-4}^{0} g(t)dt = -\, area\ di\ un\ semicerchio\ di\ raggio\ 2 = -\,2\,\pi$$

L'arco AB fa parte della circonferenza di centro (2;0) e raggio 2; la sua equazione è:

$(x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$. Rappresentiamola graficamente:



$$f(1) = \int_{-4}^{1} g(t)dt = -2\pi + Area\,(OB'B) =$$
$$= -2\pi + (Area(settore\ circolare\ OC'B) - Area\ triangolo\ B'C'B)) =$$
$$= -2\pi + \left(\frac{1}{6}\pi \cdot 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(2) = \int_{-4}^{2} g(t)dt = -2\pi + \frac{1}{4}(\pi \cdot 4) = -\pi$$

$$f(4) = \int_{-4}^{4} g(t)dt = -\pi + 2 \cdot 2 = 4 - \pi$$

$$f(6) = \int_{-4}^{6} g(t)dt = 4 - \pi + Area\,(metà\ segmento\ parabolico) = 4 - \pi + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2\right) =$$

$$= 4 - \pi + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} - \pi \cong 3.5$$

3)

Per quali valori di x dell'intervallo [- 4; 6], f(x)è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda f"(x)?

$$\boldsymbol{f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt}$$

Per studiare il segno di f(x) seguiamo l'andamento dell'area da -4 in poi.
f(x) parte dal valore 0 (per x= -4), poi decresce fino ad x=0, dove vale -2π.
Cresce da 0 fino ad un valore a compreso tra 2 e 4, dove varrà zero (ricordiamo che

$f(2) = -\pi < 0$ $\quad f(4) = 4 - \pi > 0$ quindi f(a)=0 con 2<a<4. Il valore di a è tale che:

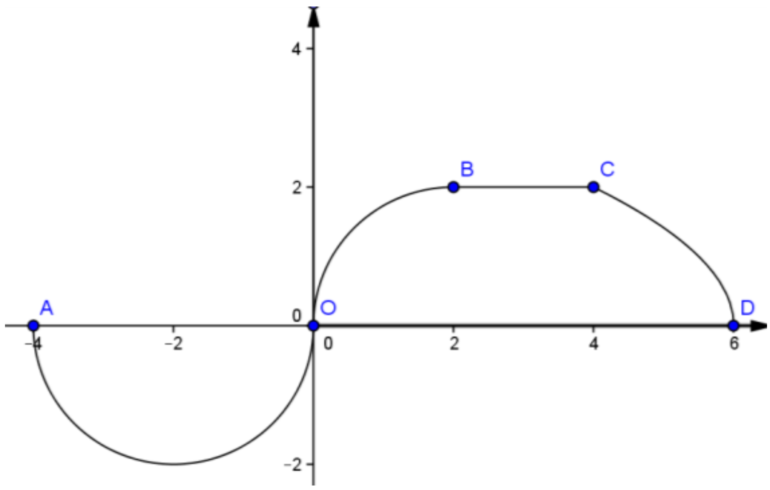
$(a-2) \cdot 2 = \pi$ *da cui* $2a - 4 = \pi$ *quindi* $a = 2 + \frac{\pi}{2} \cong 3.6$

Da a fino a 6, f(x) è positiva e continua a crescere (… aggiungiamo un'area positiva) fino al valore

$f(6) = \frac{20}{3} - \pi \cong 3.5$

Pertanto:

f(x) è positiva per $2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6$
f(x) è negativa per -4<x<$2 + \frac{\pi}{2}$
f(x) si annulla per x=- 4 e per x = $2 + \frac{\pi}{2}$



Osserviamo che f''(x)=g'(x), quindi il segno della f'' corrisponde al segno della g'.

$f''(x) = g'(x) > 0$ dove g è crescente: $-2 < x < 2$ (escluso x=0 dove g' non esiste)
$f''(x) = g'(x) < 0$ dove g è decrescente: $-4 < x < -2 \quad e \quad 4 < x < 6$
$f''(x) = g'(x) = 0$ nei punti a tangente orizzontale di g(x): $x = -2, \quad 2 \leq x < 4.$

La f ha flesso in x = - 2, è concava verso l'alto da - 2 a 2, è concava verso il basso da - 4 a - 2 e da 4 a 6; f è una retta da 2 a 4.

4)

La funzione presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di f(x)?

f è crescente dove $f'(x) = g(x) > 0$: $\quad 0 < x < 6$

f è decrescente dove $f'(x) = g(x) < 0$: $-4 < x < 0$

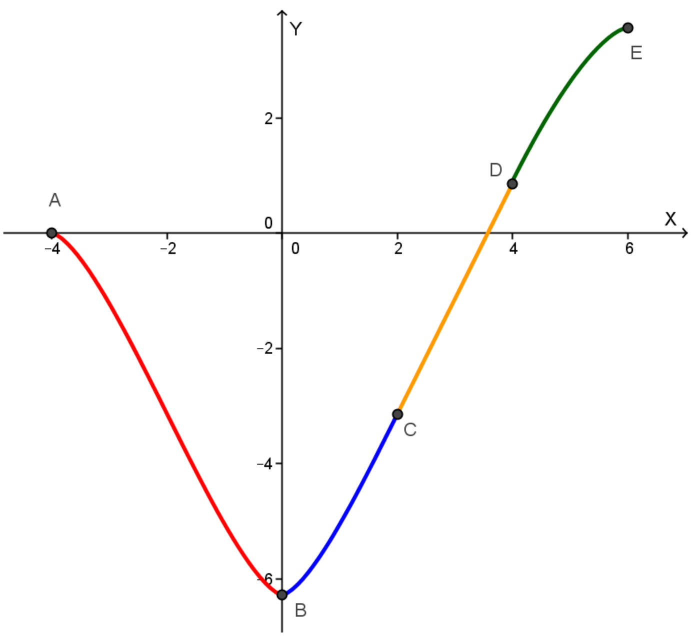
Siccome f è continua in [-4;6], avrà un minimo relativo (e assoluto) per x=0, che vale

$f(0) = -2\pi$<0

In x= -4 la funzione vale 0, come in x=a=$2 + \frac{\pi}{2}$

In x=6 la funzione vale $f(6) = \frac{20}{3} - \pi \cong 3.50$, che è il massimo assoluto.

Grafico di f(x):



N.B.

L'espressione analitica di f(x) potrebbe essere ricavata da quella della g(x), ricordando che:

$$f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt\,,\quad con\ -4 \leq x \leq 6$$

e ricavando la g, che risulta:

$$g(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x^2-4x} & se -4 \le x \le 0 \\ \sqrt{4x-x^2} & se\ 0 < x \le 2 \\ 2 & se\ 2 < x \le 4 \\ \sqrt{12-2x} & se\ 4 < x \le 6 \end{cases}$$

L’espressione analitica della f(x) è la seguente:

$$f(x)=\int_{-4}^{x} g(t)dt=\begin{cases} -2\arcsin\left(\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{1}{2}\sqrt{-x^2-4x}\ \cdot(x+2)-\pi & se -4 \le x \le 0 \\ 2\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)+\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+4x}\ \cdot(x-2)-\pi & se\ 0 < x \le 2 \\ 2x-4-\pi & se\ 2 < x \le 4 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{2}(6-x))\sqrt{6-x}+2+\frac{\pi}{2} & se\ 4 < x \le 6 \end{cases}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri