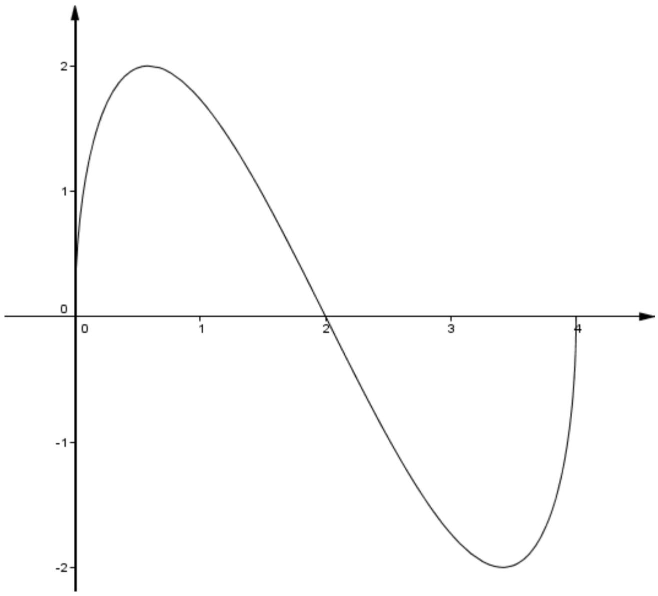
# PNI 2014 - PROBLEMA 2

## 1)

$\boldsymbol{f(x) = (2-x)\sqrt{4x-x^2}}$



*Dimostriamo che (2;0) è centro di simmetria per il grafico $\Gamma$ di f(x).*

Le equazioni della simmetria centrale rispetto al punto (2;0) sono:

$\begin{cases} x' = 4-x \\ y' = -y \end{cases}$ che possono essere viste nella forma: $\begin{cases} x \to 4-x \\ y \to -y \end{cases}$

La simmetrica di f(x) rispetto al punto (2;0) è quindi:

$-y = (-2+x)\sqrt{4(4-x)-(4-x)^2} \Rightarrow y = (2-x)\sqrt{4x-x^2} = f(x)$

$f'(x) = \dfrac{2(x^2-4x+2)}{\sqrt{4x-x^2}}$

da cui $\boldsymbol{f'(2) = -2}$

La **tangente** in (2;0) ha quindi equazione: y – 0 = - 2(x-2), **y = -2x+4**

Detto $\alpha$ l'angolo formato dalla tangente in (2;0) con il semiasse positivo delle x, risulta:

$tg\ \alpha = -2, \quad da\ cui \quad \alpha = 180° - arctg(2) \cong 116°34'$

## 2)

Sia t un numero qualunque tale che $0 < t < 2$.

$$\boldsymbol{f'(2+t) = \cdots = \frac{2(t^2-2)}{\sqrt{4-t^2}} = f'(2-t)}$$

Quindi per ogni t dell'intervallo dato le tangenti alla curva nei suoi punti di ascissa 2+t e 2-t sono parallele.

Vediamo ora se esistono rette tangenti alla curva parallele alla retta di equazione

**21 x + 10 y + 31 = 0**

Il coefficiente angolare della retta è $m = -\frac{21}{10}$

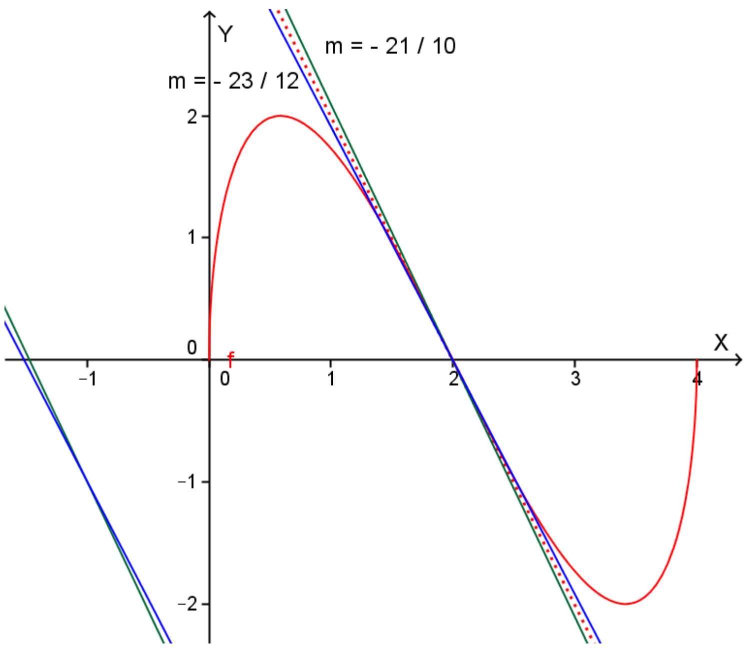
$f'(x) = \frac{2(x^2-4x+2)}{\sqrt{4x-x^2}} = -\frac{21}{10}$ < -2 (che è il coefficiente angolare della tangente nel centro di simmetria) quindi (vedi grafico) impossibile: non esistono rette tangenti parallele alla retta 21 x + 10 y + 31 = 0

Vediamo ora se esistono rette tangenti alla curva parallele alla retta di equazione

**23 x + 12 y + 35 = 0**

Il coefficiente angolare della retta è $m = -\frac{23}{12}$

$f'(x) = \frac{2(x^2-4x+2)}{\sqrt{4x-x^2}} = -\frac{23}{12}$ > -2 (che è il coefficiente angolare della tangente nel centro di simmetria) quindi dal grafico si può dedurre ci sono due rette tangenti alla curva parallele alla retta 23 x + 12 y + 35 = 0 (una tangente tocca la curva nel primo quadrante, l'altra nel quarto quadrante).



**3)**

L'area richiesta è data da:

$$Area = 2\cdot\int_0^2 f(x)dx = 2\cdot\int_0^2 (2-x)\sqrt{4x-x^2}dx = \int_0^2 (4-2x)\sqrt{4x-x^2}dx =$$
$$= \left[\frac{2}{3}(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}(8-0) = \frac{16}{3}$$

**4)**

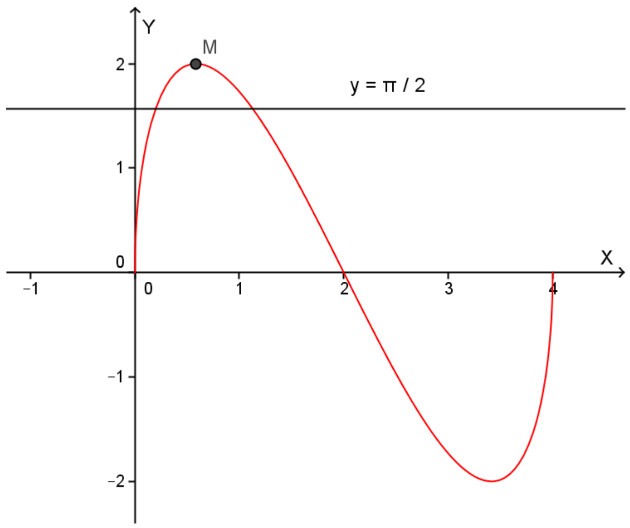
$$h(x) = sen(f(x)) = sen\left((2-x)\sqrt{4x-x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2-4x+2)}{\sqrt{4x-x^2}} = 0\ per\ \ x = 2\pm\sqrt{2}$$

Osservando il grafico si osserva quindi che f(x) ha il massimo (assoluto) 2 per $x = 2-\sqrt{2}$ ed il minimo assoluto -2 per $x = 2+\sqrt{2}$.

I punti del grafico di h(x) di ordinata 1 sono quelli per cui: $sen\left((4-2x)\sqrt{4x-x^2}\right) = 1$, cioè:

$(4-2x)\sqrt{4x-x^2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$: osservando il grafico di f(x) può essere solo k=0 e si hanno DUE PUNTI DI INTERSEZIONE tra y=f(x) ed y= $\frac{\pi}{2}$, quindi i punti del grafico di h(x) di ordinata 1 sono 2: $0 < x_1 < 2-\sqrt{2}$ e $2-\sqrt{2} < x_2 < 2$




Per $0 \le x \le 2-\sqrt{2}$ la f(x) cresce da 0 a 2, e siccome 2 > $\frac{\pi}{2}$ sen (f(x)) ha il massimo assoluto 1 quando

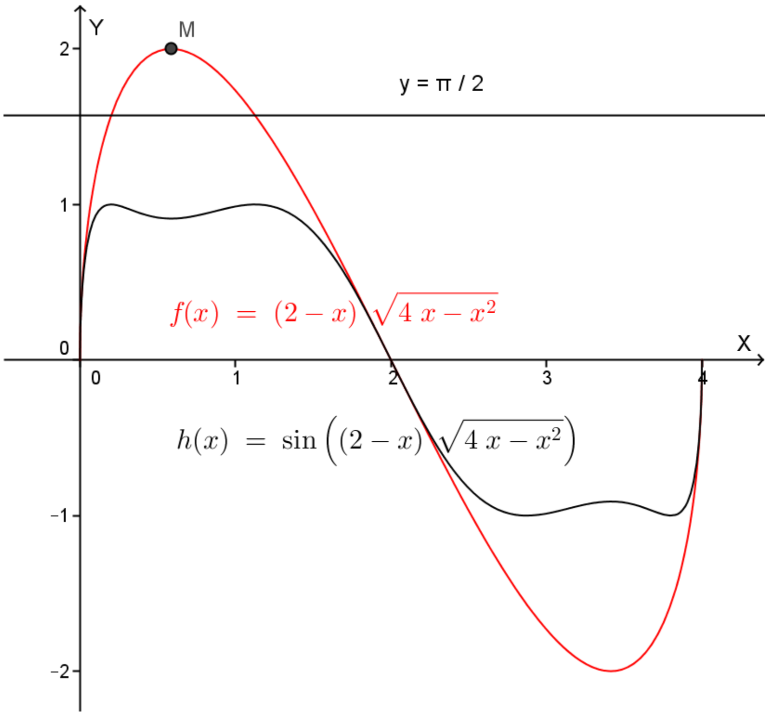
$(4-2x)\sqrt{4x-x^2} = \frac{\pi}{2}$, cioè per $x = x_1$.

Per $2-\sqrt{2} < x \le 2$ la f(x) decresce dal valore 2 al valore 0, passando per $x = x_2$ dove h(x)=1.

Quando f(x) passa da $\frac{\pi}{2}$ a 2 h(x) decresce da 1 a sen(2); quando f(x) decresce da 2 a $\frac{\pi}{2}$, h(x) cresce da sen(2) a 1: **quindi sen(2) è minimo relativo (per x=$2-\sqrt{2}$ ).**
**Infine quando f(x) passa dal valore** $\frac{\pi}{2}$ al valore 0, h(x) decresce da 1 a zero.

Siccome sen(f(-x))=sen(-f(x))=-sen(f(x)), anche h(x) è simmetrica rispetto al punto (2;0).

Si ha pertanto il seguente grafico di $\boldsymbol{h(x) = sen\left((2-x)\sqrt{4x-x^2}\right)}$

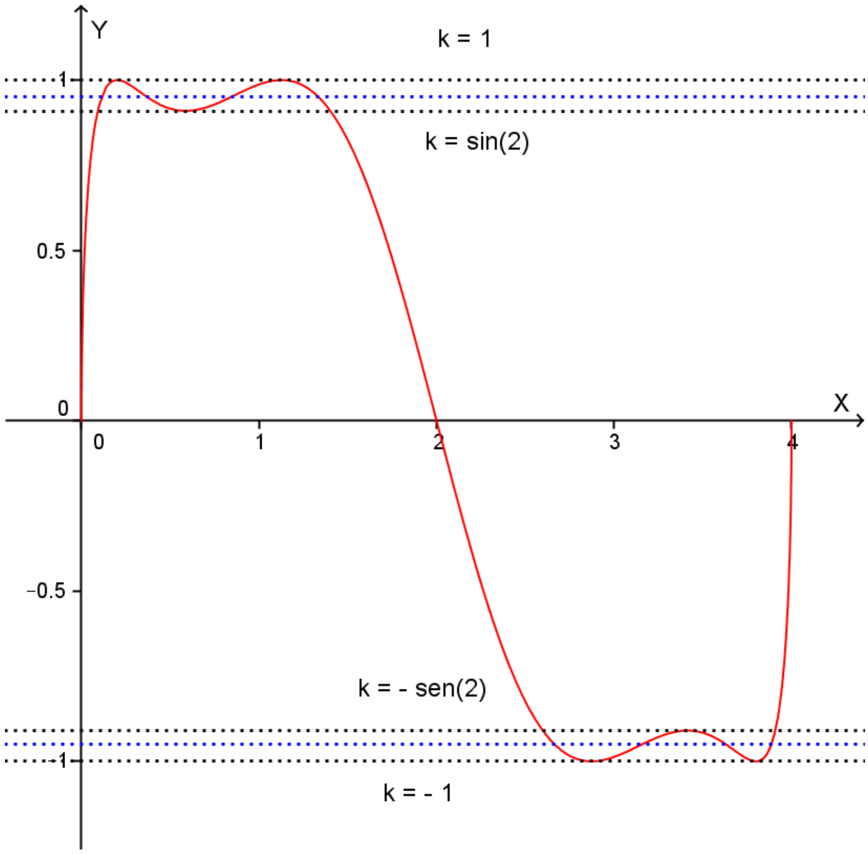



h(x) presenta **massimo assoluto ( e relativo) 1** per $x = x_1$, con $0 < x_1 < 2-\sqrt{2}$ e $x = x_2$, con $2-\sqrt{2} < x_2 < 2$; presenta **un massimo relativo – sen(2)** per $x = 4-\left(2-\sqrt{2}\right) = 2+\sqrt{2}$ (*x=0 e x=6, non essendo punti interni, non si considerano estremanti relativi*).
h(x) presenta **minimo relativo sen(2)** per $x = 2-\sqrt{2}$, e minimo assoluto (e relativo) -1 per $x = 4-x_2$ e $x = 4-x_1$.

Dobbiamo ora trovare per quali valori di k l'equazione h(x)=k ha 4 soluzioni distinte.

Come si evince dal grafico e dallo studio della variazione di h(x) fatto sopra, risulta che il grafico di h(x) taglia la retta y=k in **4 punti distinti quando:**

$\boldsymbol{sen(2) < k < 1}$ **oppure** $\boldsymbol{-1 < k < -sen(2)}$




Si chiede infine il valore dell'integrale $\int_0^4 h(x)dx$.

Poiché, come già osservato, h(x) è simmetrica rispetto al punto (2;0), risulta:

$$\int_0^4 h(x)dx = \int_0^2 h(x)dx + \int_2^4 h(x)dx = \int_0^2 h(x)dx - \int_0^2 h(x)dx = 0$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri