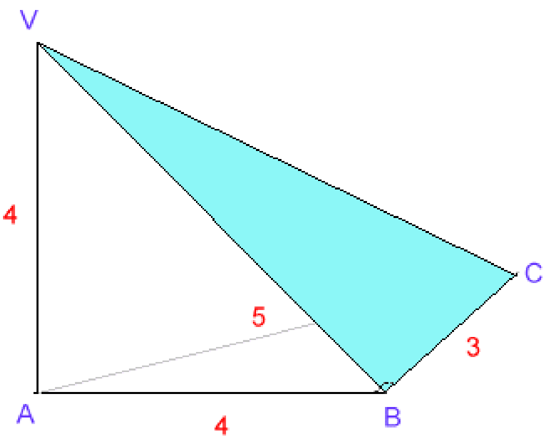
Sessione ordinaria - Indirizzo P.N.I. 1999
Soluzione quesito 2

a)



1. Il triangolo VBC è rettangolo con angolo retto in B poiché BC è perpendicolare al piano ABV e quindi anche ad ogni retta del piano ABV che passa per B
2. Che il triangolo ABV sia rettangolo si può anche verificare applicando il teorema di Pitagora; si scopre facilmente la relazione

$\overline{BV}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{VC}^2$ essendo:

$\overline{VC} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$\overline{BV} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

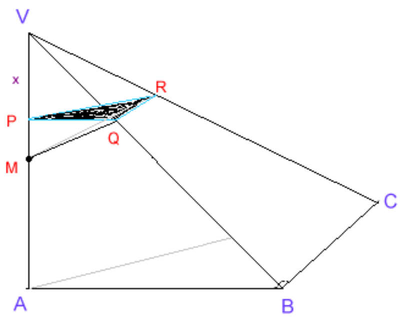
$\overline{BC} = 3$

b)

$$V = \frac{1}{3} Area(ABC) \cdot h = 8u^3$$

$$Area\ totale = (24 + 6\sqrt{2})\ u^2 = 6(4+\sqrt{2})\ u^2$$

c)



$\overline{PV} = x \quad con \quad 0 \le x \le 4$

$V(MPQR) = f(x)$

$\frac{A(PQR)}{A(ABC)} = \frac{\overline{VP}^2}{\overline{VA}^2}$ da cui

$A(PQR) = \frac{3}{8} x^2$ e quindi si ottiene :

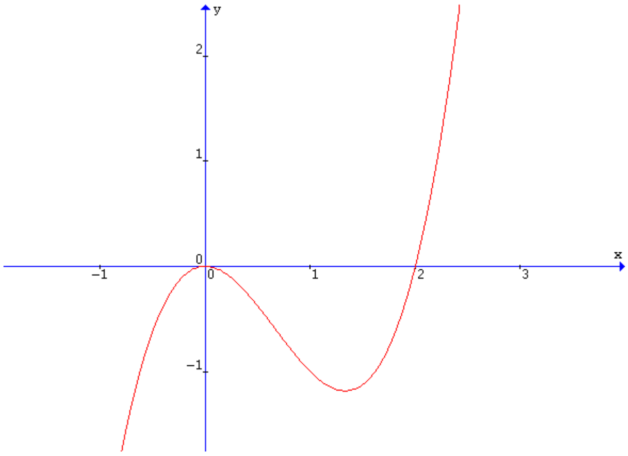
$v = \frac{1}{8} x^2 \, |2 - x|$

d)

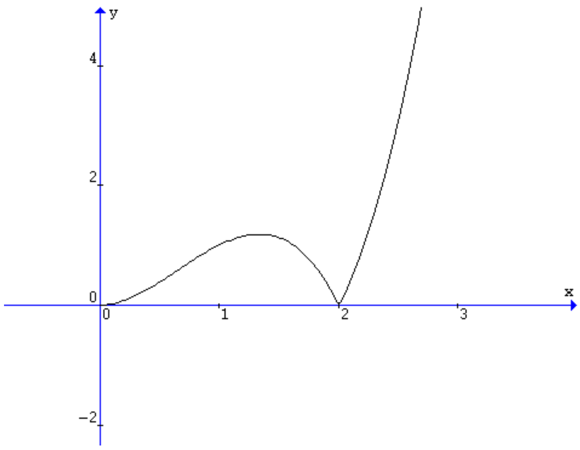
La funzione da studiare può essere facilmente dedotta dalla funzione di equazione

$$y = \frac{1}{8}x^2(x-2)$$

il cui grafico è



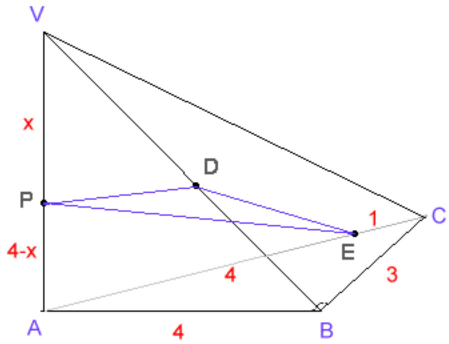
Da questo si deduce facilmente il grafico richiesto

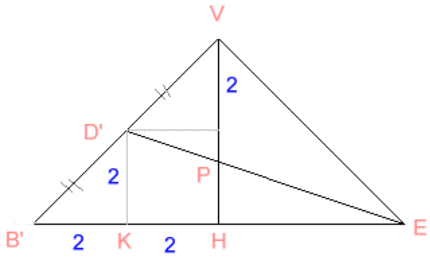


da considerare da 0 a 4 in base alle limitazioni geometriche sulla x.

Tale funzione ha il massimo assoluto per **x = 4**, che rappresenta la distanza di P da V nel caso richiesto (volume massimo); il **volume massimo vale 4** e si ha quando P coincide con A: in tal caso il tetraedro MPQR ha la massima area di base (ABC) e la massima altezza (4).

e)





Effettuando la rotazione suggerita e indicando con D' e B' le posizioni assunte da D e B, osservando la figura si nota come il minimo richiesto (che corrisponde al minimo della somma D'P + PE) si ottenga quando D', P ed E sono allineati.

Risulta:

$$\overline{D'V} = 2\sqrt{2} \quad \overline{B'H} = \overline{HE} = 4 \quad \frac{\overline{D'K}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{KE}}{\overline{HE}}$$

da cui si ottiene facilmente

$$\overline{PH} = \frac{4}{3} \quad \text{e quindi} \quad x = \overline{VP} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = \overline{VP}*$$

N.B.

Allo stesso risultato si può arrivare senza eseguire la rotazione suddetta.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo APE si calcola la misura di PE:

$$\overline{PE} = \sqrt{16 + (4 - x)^2}$$

Applicando il teorema di Carnot al triangolo VPD (che ha l'angolo in V di 45°) si calcola la misura di PD:

$$\overline{PD} = \sqrt{x^2 + 8 - 4\sqrt{2}x\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Si tratta quindi di determinare il minimo della funzione di equazione

$$y = \sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$$

Mediante il calcolo delle derivate si arriva alla determinazione del minimo richiesto (x=8/3).