# Sessione ordinaria - Indirizzo P.N.I. 1999
## Soluzione quesito 3

**a)**

$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$ $T_1$ rappresenta un'omotetia di centro O e rapporto 2

$\begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases}$ $T_2$ rappresenta una rotazione di 90° in senso antiorario intorno all'origine O

$\begin{cases} X = x''+2 \\ Y = y''-1 \end{cases}$ $T_3$ rappresenta una traslazione di vettore (2;-1)

**b)**

La trasformazione T è la composizione delle tre trasformazioni date, ovvero

$$T = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$$

le cui equazioni si ottengono come segue:

$$\begin{cases} X = x''+2 = -y'+2 = -2y + 2 \\ Y = y''-1 = x'-1 = 2x - 1 \end{cases}$$

La T ha quindi equazioni

$$\begin{cases} X = -2y + 2 \\ Y = +2x - 1 \end{cases}$$

**c)**

T rappresenta una similitudine diretta di rapporto k=2; il rapporto tra le aree delle figure corrispondenti è $k^2 = 4$. Tale trasformazione è una particolare affinità che muta circonferenze in circonferenze; come tutte le affinità mantiene il parallelismo tra le rette; k rappresenta il rapporto tra i segmenti corrispondenti, che è, appunto, costante.

- Ricerca **punti uniti**:

  ponendo X=x e Y=y nelle equazioni della trasformazione si scopre, con semplici calcoli, il **punto unito (4/5;3/5)**

- Ricerca **rette unite:**

  Data la retta generica di equazione

  $\mathbf{aX + bY + c = 0}$ (a e b non contemporaneamente nulli)

  La sua corrispondente in T ha equazione

  $\mathbf{2b\,x - 2a\,y + 2a - b + c = 0}$

  Le due rette coincidono se

  $\mathbf{a/2b = b/(-2a) = c/(2a - b + c)}$

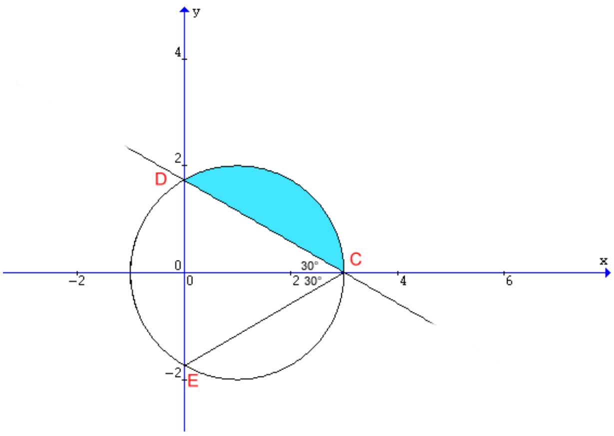
  La prima uguaglianza diventa

  $\mathbf{-2\,a^2 = 2\,b^2}$

  che è verificata solo per **a** e **b** contemporaneamente nulli, situazione mai verificata.

  **Non ci sono quindi rette unite.**

**d)**



Risulta

$\frac{\overline{DO}}{\overline{OC}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pertanto l'angolo DCO misura 30°.

Il triangolo CDE è pertanto equilatero. Essendo

$\overline{DE} = 2\sqrt{3} = R\sqrt{3}$ risulta R=2.

**N.B**. Il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero coincide con il baricentro, che nel nostro caso è il punto di coordinate (1;0); ma, per rispondere al quesito, non serve l'equazione della circonferenza.

Per determinare le aree ed i perimetri richiesti è sufficiente trovarli nella figura di partenza e poi applicare le proprietà della similitudine (l'area si moltiplica per 4 ed il perimetro per 2).

Detta $A_1$ l'area del segmento circolare più piccolo risulta:

$3\,A_1$ = area cerchio - area triangolo CDE = $4\pi - 3\sqrt{3}$

quindi, indicata con $A'_1$ la prima delle due aree richieste, si ha:

$$A_1 = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad A_1' = 4\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

L'area del secondo segmento circolare si ottiene sottraendo all'area del cerchio l'area del primo segmento circolare:

$$A_2 = 4\pi - A_1 = \frac{8}{3}\pi + \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad A'_2 = 4\left(\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}\right)$$

**e)**

Il perimetro della prima regione è uguale ad un terzo della circonferenza più il lato del triangolo.

Con notazioni analoghe a quelle del punto precedente si ha:

$$2p_1 = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad 2p'_1 = 2\left(\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right)$$

Il perimetro della seconda regione è uguale a due terzi di circonferenza più il lato del triangolo:

$$2p_2 = \frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad 2p'_2 = 2\left(\frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right)$$

**N.B.**

La circonferenza $\gamma$ ha centro (1;0) e raggio 2; la sua equazione è:

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

La circonferenza trasformata si ottiene applicando alla precedente la trasformazione $T^{-1}$ le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+Y}{2} \\ y = \dfrac{2-X}{2} \end{cases}$$

Si ottiene:

$X^2 + Y^2 - 4X - 2Y - 11 = 0$

La retta **a** ha equazione

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$$

e la sua trasformata **a'**

$$3X - \sqrt{3}Y + 5\sqrt{3} - 6 = 0$$