ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO -1999

PROGETTO "BROCCA" – INDIRIZZO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA

La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti.

1. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è data la parabola γ di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2} - x$$

Siano A un punto dell'asse x di ascissa λ , con $\lambda > 0$, B il suo simmetrico rispetto ad O, e A' e B' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse x sono rispettivamente A e B.

Il candidato:

a. verifichi che le tangenti *a* e *b* alla parabola γ , rispettivamente in A' e B', s'incontrano in un punto E dell'asse y;
b. detti C e D i rispettivi punti d'intersezione di *a* e *b* con l'asse x, esprima in funzione di λ l'area *s* del triangolo CED;
c. studi la funzione $s(\lambda)$ e tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'\lambda s$, la curva C di equazione $s = s(\lambda)$;
d. detto λ_0 il valore di λ per cui *s* assume valore minimo relativo, e detti a_0 e b_0 le posizioni di *a* e *b* per detto valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione $y \leq 0$, compresa tra γ , a_0 e b_0;
e. osservato che, nell'ipotesi posta di $\lambda > 1$, esistono due valori λ_1 e λ_2, con $\lambda_1 < \lambda_2$, per cui il triangolo CED è equivalente al quadrato di lato OA, descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di λ_1 con un'approssimazione di 10^{-n} e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

2. In un piano α è assegnato il triangolo *ABC*, retto in *B*, i cui cateti *AB* e *BC* misurano rispettivamente 4 e 3.

   Si conduca per il punto *A* la perpendicolare al piano α e sia *V* un punto di questa per cui *VA*=*AB.*

Il candidato:

a. dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro *VABC,* anche la faccia *VBC* è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$;
b. calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro;

c. detto *M* il punto medio di *VA* e *P* un punto dello stesso segmento a distanza x da *V*, esprima in funzione di x il volume *v* del tetraedro *MPQR*, essendo *Q* ed *R* le rispettive intersezioni degli spigoli *VB* e *VC* con il piano β parallelo ad α e passante per *P*;
d. studi come varia *v* al variare di *P* sul segmento *VA,* determinando in particolare la posizione $\bar{P}$ di *P* in cui il volume *v* assume valore massimo assoluto;
e. detto *D il* punto medio di *VB* ed *E il* punto di *AC* tale che *AE=AB*, determini la posizione *P** di *P* che rende minima la somma *DP+PE (si* consiglia di far ruotare il triangolo *VAB* attorno ad *AV* fino a portarlo nel piano del triangolo *VAE,* simmetricamente a quest'ultimo, e considerare la somma *D'P+PE,* essendo *D' il* corrispondente di *D* nella suddetta rotazione).

3. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti P(x,y), A(x',y'), B(x",y"), P'(X,Y), legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases} \quad \begin{cases} X = x''+2 \\ Y = y''-1 \end{cases}$$

Il candidato:

a. dica la natura delle trasformazioni T_1, T_2, T_3, rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni;
b. determini la trasformazione *T* che fa passare da P a P';
c. studi la trasformazione *T* enunciandone le proprietà e determinandone, in particolare, gli eventuali elementi uniti;
d. considerati i punti C(3,0), D(0,$\sqrt{3}$), E(0, $-\sqrt{3}$), e detti γ la circonferenza per tali punti, *a* la retta *CD*, γ' ed *a'* i trasformati di γ ed *a* mediante *T*, determini l'area delle regioni finite di piano delimitate da γ' ed *a'*;
e. determini il perimetro delle stesse regioni.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice scientifica non grafica.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.