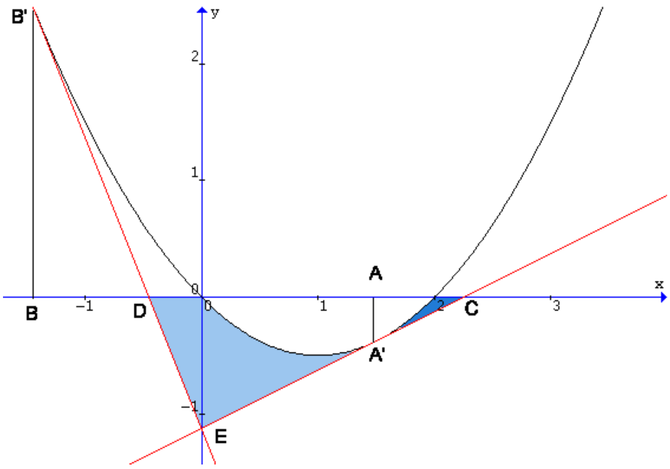
Sessione ordinaria - Indirizzo P.N.I. 1999
Soluzione quesito 1

$y = \frac{1}{2}x^2 - x$

$A(\lambda;0)$ $\quad B(-\lambda;0)$ $\quad A'(\lambda;\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda)$ $\quad B'(-\lambda;\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda)$



a)

y' = x - 1

$y'(\lambda) = \lambda - 1 \qquad y'(-\lambda) = -\lambda - 1$

$a: \quad y = (\lambda - 1)x - \frac{1}{2}\lambda^2$

$b: \quad y = (-\lambda - 1)x - \frac{1}{2}\lambda^2$

$E = (0; -\frac{1}{2}\lambda^2)$

b)

$$X_C = \frac{\lambda^2}{2(\lambda-1)} \qquad X_D = \frac{-\lambda^2}{2(\lambda+1)}$$

$$\overline{CD} = |X_C - X_D| = \frac{1}{2}\lambda^2\left|\frac{2\lambda}{\lambda^2-1}\right|$$

$$s = \frac{1}{4}\left|\frac{\lambda^5}{\lambda^2-1}\right| \qquad (con \quad \lambda > 0)$$

c)

E' sufficiente studiare la funzione di equazione

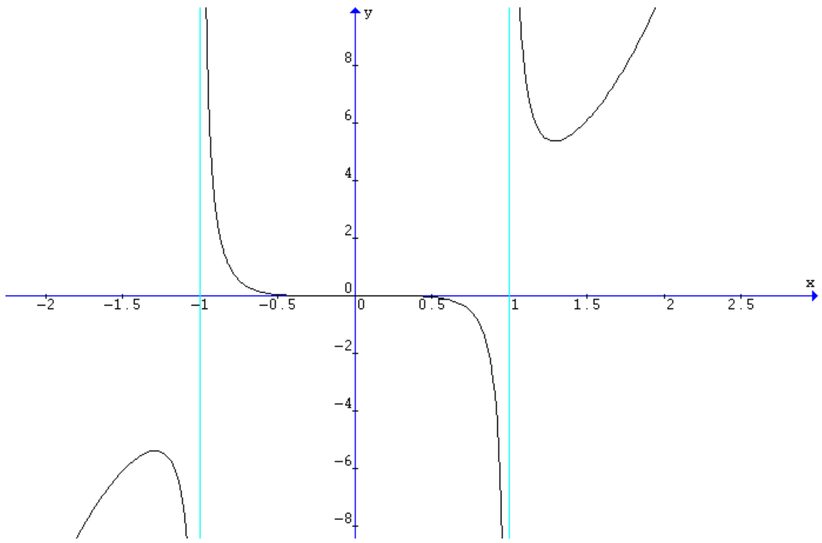
$$y = \frac{x^5}{x^2-1} \qquad \text{(per comodità si è posto } y = s \text{ ed } x = \lambda\text{)}$$

che ha come derivate prima e seconda

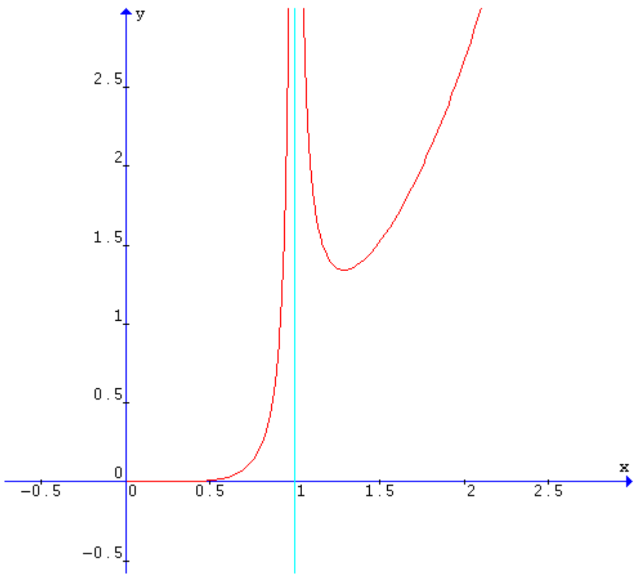
$$y' = \frac{x^4(3x^2-5)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3(3x^4-9x^2+10)}{(x^2-1)^3}$$

Si ottiene il grafico



Da questo, tenendo conto delle limitazioni sulla x si ottiene il grafico richiesto



L'analisi della derivata prima permette di stabilire che il minimo relativo si ottiene per

$$x = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

d)

In corrispondenza del valore

$$x = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

si ottiene

$$E(0; -\frac{5}{6})$$

L'area richiesta (v. figura iniziale) si ottiene sommando l'area del triangolo OED e l'area del triangolo mistilineo OEA':

$$Area(OED) = \frac{5/6}{\sqrt{\frac{5}{3}}+1}$$

Per l'area di OEA' si deve calcolare l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}[\frac{1}{2}x^2 - x - (\sqrt{\frac{5}{3}}-1)x + \frac{5}{6}]dx = \ldots\ldots = $$

$$\frac{95}{72}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{25}{24} \cong 0.6617$$

N.B.

Se si considera anche il triangolo mistilineo compreso tra l'asse x, la parabola ed il segmento A'C basta sottrarre all'area del triangolo ECD il segmento parabolico sotto l'asse delle x:

$$\frac{\overline{CD}\cdot\overline{OE}}{2} - \frac{2}{3}(2)(\frac{1}{2}) = \frac{25}{12}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{2}{3}$$

e)

$\lambda > 1 \quad \lambda_1 < \lambda_2$

$$A(CED) = \overline{OA}^2$$

$$\frac{1}{4}\frac{\lambda^3}{\lambda^2-1} = \lambda^2$$

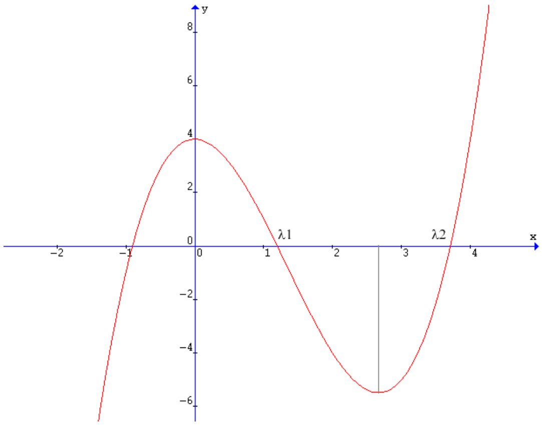
che, con le condizioni su λ, conduce all'equazione di terzo grado

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4 = 0$

Uno studio qualitativo della funzione di equazione

$y = x^3 - 4x^2 + 4$

porta al grafico



da cui si nota che la radice richiesta è compresa tra 1 e 2 (Derive fornisce per le due radici positive i valori approssimati 1.19393 e 3.70927).

Un possibile programma in Pascal (che usa il metodo di bisezione) per calcolare un valore approssimato della prima radice positiva è il seguente:

```
PROGRAM  pni99;

Uses Crt;

Const    a=1;
         b=2;

Var      n:integer;
         c:real;
         risposta:char;
(*------------------------------------------------------------------------*)

Procedure Presentazione;

Begin
  Writeln('Questo programma permette di calcolare la radice di ');
  writeln('X^3 - 4X^2 +4 = 0       nell''intervallo [1;2]');
  Writeln('a meno di 10 ^(-n) ');
  Writeln;writeln;

End;
(*------------------------------------------------------------------------*)

Procedure  Dati;
Begin
 Write('n = ');
 Readln(n);
 Writeln;
 Writeln('--------------------------------------------------')
End;
(*------------------------------------------------------------------------*)

Function  f(x:real):real;
Begin
  f:=x*x*x-4*x*x+4
End;
```

```
(*------------------------------------------------------------------------*)

Procedure  Elabora;

Var   errore,x1,x2:real;

Begin
  errore:=exp(-n*ln(10));   (*10^(-n)*)
  x1:=a;         x2:=b;
  Repeat
    c:=(x1+x2)/2;
    If f(c)*f(x1)<0 then
    x2:=c  ELSE   x1:=c
  Until  (abs(x2-x1)<errore)  or (f(c)=0)
end;

(*------------------------------------------------------------------------*)

Procedure Comunica;

 Begin
  Writeln('La radice , con l''approssimazione richiesta , : ',c:10:n);
  Writeln;
  Writeln('--------------------------------------------------')
End;

(*------------------------------------------------------------------------*)

BEGIN (*main*)

Repeat
 Clrscr;
 Presentazione;
 Dati;
 Elabora;
 Comunica;
 Write('Ancora? (s/n)  ');
 Readln(risposta);
Until risposta in ['n','N']

END.
```