LICEO SCIENTIFICO PNI SUPPLETIVA 1999 - PROBLEMA 1

Il candidato svolga a sua scelta ***due*** *dei tre argomenti proposti.*

Data la funzione y = f(x)= $\frac{4}{x+k}$ *e la funzione y = g(x)=*x^2-hx+4 *ove k e h sono due numeri reali.*

a)

Determinare per quali valori di k ed h è $f(1)=g(1)$ *e* $f'(1)=g'(1)$.

Risulta: $f(1)=\frac{4}{1+k}$ $(k\neq -1)$; $g(1)=5-h$: $\frac{4}{1+k}=5-h$

$$f'(x)=-\frac{4}{(x+k)^2}: \quad f'(1)=-\frac{4}{(1+k)^2}$$

$g'(x)=2x-h$: $g'(1)=2-h$. Quindi: $-\frac{4}{(1+k)^2}=2-h$. Pertanto:

$$\begin{cases} \frac{4}{1+k}=5-h \\ -\frac{4}{(1+k)^2}=2-h \end{cases}; \quad \begin{cases} h=5-\frac{4}{1+k} \\ -\frac{4}{(1+k)^2}=2-5+\frac{4}{1+k} \end{cases}$$

$$-\frac{4}{(1+k)^2}=2-5+\frac{4}{1+k};\ -4=-3(1+k)^2+4(1+k);\ \dots;\ 3k^2+2k-5=0:$$

$$k=1, \qquad k=-\frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} h=5-\frac{4}{1+k}=5-2=3 \\ k=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} h=5-\frac{4}{1+k}=5-\frac{4}{-\frac{2}{3}}=5+6=11 \\ k=-\frac{5}{3} \end{cases};$$

I valori richiesti di k ed h sono quindi: $k=1$ *ed* $h=3$ *oppure*: $k=-\frac{5}{3}$ *e* $h=11$

b)

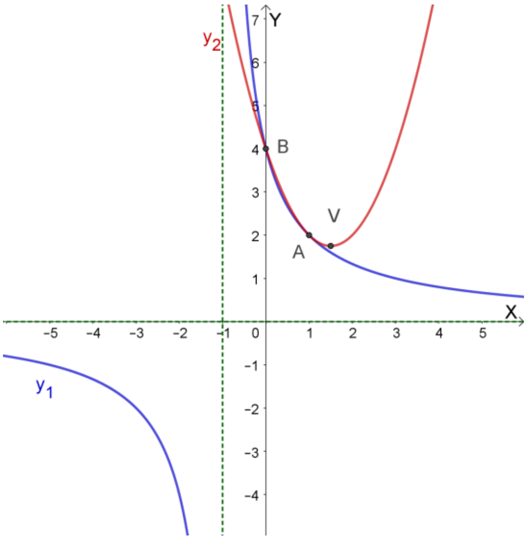
Tracciare su uno stesso piano di assi cartesiani i grafici delle due funzioni
$y_1 = \dfrac{4}{x+1}$ *e* $y_2 = x^2 - 3x + 4$

$y_1 = \frac{4}{x+1}$ è una funzione omografica di centro $C = (-1; 0)$, asintoti di equazioni:

$x = -1$ *e* $y = 0$; il suo grafico taglia l'asse delle ordinate in $y = 4$.

$y_2 = x^2 - 3x + 4$ è una parabola con asse parallelo all'asse delle y, taglia l'asse y nel punto di ordinata $y = 4$ (come la funzione omografica); essendo $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$ non taglia l'asse delle ascisse. Ha la concavità rivolta verso l'alto e vertice: $V = \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

I grafici delle due funzioni sono i seguenti:



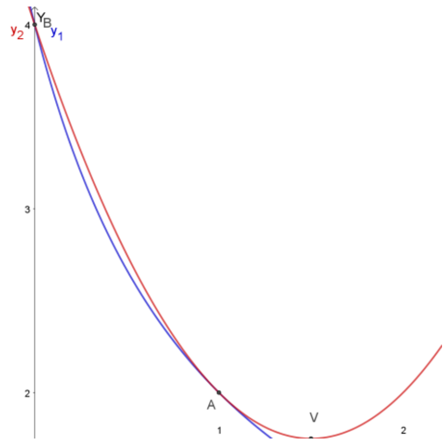
Osserviamo che le due curve si intersecano in $B = (O; 4)$. Vediamo se hanno altri punti in comune:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{4}{x+1} \\ y_2 = x^2 - 3x + 4 \end{cases} ; \quad \frac{4}{x+1} = x^2 - 3x + 4; \quad 4 = x^3 - 3x^2 + 4x + x^2 - 3x + 4;$$

$4 = x^3 - 3x^2 + 4x + x^2 - 3x + 4;\ \ x^3 - 2x^2 + x = 0;\ \ x(x^2 - 2x + 1) = 0, quindi:$

$x = 0$, $x = 1$ $(doppia)$. Le curve quindi si intersecano in $B = (O; 4)$ e $A = (1; 2)$; in A sono tangenti, quindi per 0< $x < 1$ il grafico della parabola è al di sopra del grafico dell'iperbole.

Ingrandiamo questa zona per vedere meglio la situazione grafica:



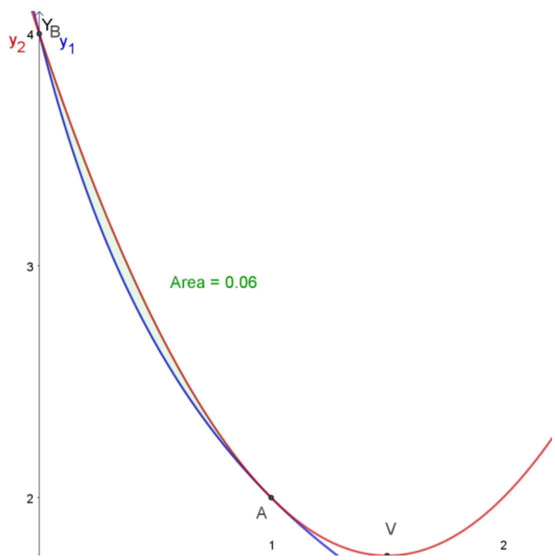
c)

Calcolare l'area della superficie delimitata dalle curve rappresentanti le due funzioni y_1 e y_2.

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_0^1 \left(x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{x+1}\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 4\,ln|x+1|\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - 4\ln 2 - 0 = \frac{17}{6} - 4 \cdot ln2 \cong 0.0607\ u^2 = Area.$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria