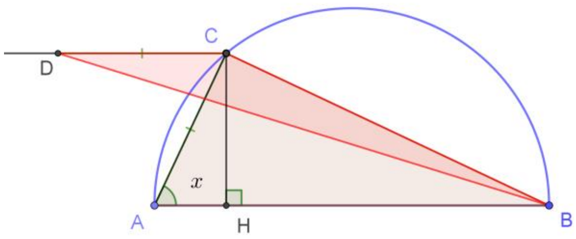
LICEO SCIENTIFICO PNI SUPPLETIVA 1999 - PROBLEMA 2

In una semicirconferenza è inscritto un triangolo rettangolo ABC di base $\overline{AB}=2$. *Si tracci la semiretta parallela alla base AB passante per C e che non interseca la circonferenza. Sia D il punto su tale semiretta per cui è* $\overline{CD}=\overline{AC}$.

a)

Trovare la funzione f(x) che esprime la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD in funzione dell'angolo $B\hat{A}C = x$.



$$Area(ABC)=\frac{AB\cdot CH}{2}=\frac{2\cdot AC\sin x}{2}=AC\sin x=2\cos x\sin x$$

$$Area(BCD)=\frac{CD\cdot CH}{2}=\frac{AC\cdot AC\sin x}{2}=\frac{AC^2\sin x}{2}=\frac{4\cos^2 x\sin x}{2}=2\ \cos^2 x\sin x$$

$$f(x)=Area(ABC)-Area(BCD)=2\cos x\sin x-2\cos^2 x\sin x=\sin 2x-2\sin 2x\cos x=$$

$$=\sin 2x\,(1-\cos x)=f(x),\qquad 0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

b) *Rappresentare il grafico della funzione y = f(x) con*

$$y=\operatorname{sen}2x(1-\cos x)$$

nell'intervallo [0, 2π].

Osserviamo che la funzione è continua e derivabile in tutto l'intervallo e che è periodica con periodo $T=2\pi$.

Intersezioni con gli assi cartesiani

Se $x=0, y=0$.

Se $y=0,\ \sin 2x\,(1-\cos x)$; *quindi*:

$\sin 2x = 0, da\ cui\ 2x = k\pi, x = k\frac{\pi}{2}\ e\ nel\ nostro\ intervallo$:

$x = 0, x = \frac{\pi}{2}\ , x = \pi, x = \frac{3}{2}\pi\ e\ x = 2\pi$

$1 - \cos x = 0, \cos x = 1,\ x = 0, x = 2\pi.$

Segno della funzione

$\sin 2x\ (1 - \cos x) \geq 0, \sin(2x) \cdot 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0\ se \quad \sin(2x) \geq 0\ e \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0\ ;$

$\sin(2x) \geq 0{:}\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ , \pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0{:}\ \frac{x}{2} = k\pi, \qquad x = 2k\pi, da\ cui{:}\ x = 0\ , x = 2\ \pi$

La funzione è quindi positiva in: $0 < x < \frac{\pi}{2}\ , \pi < x < \frac{3}{2}\pi\ ,\ \ si\ annulla\ per\ \ x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

La funzione è negativa nel resto del dominio $(0; 2\pi)$.

Limiti: non occorre calcolare limiti perché, come già detto, la funzione è continua e derivabile in tutto il dominio.

Studio derivata prima

$\mathrm{f(x)} = \sin 2\mathrm{x}\ (1 - \cos \mathrm{x})\ ;\ \ f'(x) = (2\cos 2x)(1 - \cos \mathrm{x}) + (\sin 2x\ )(\sin x) =$

$= 2(2\cos^2 x - 1)(1 - \cos \mathrm{x}) + 2\sin^2 x \cos x = \cdots = -6\cos^3 \mathrm{x} + 4\cos^2 \mathrm{x} + 4\cos \mathrm{x} - 2$

Quindi $f'(x) = -6\cos^3 \mathrm{x} + 4\cos^2 \mathrm{x} + 4\cos \mathrm{x} - 2\ ; si\ annulla\ per \cos x = 1$, e abbassando

di grado con la regola di Ruffini otteniamo:

$\boldsymbol{f'(x) = (\cos x - 1)\left(-6\cos^2 x - 2\cos x + 2\right)}$

Risulta $f'(x) = 0\ (punti\ a\ tangente\ orizzonatale\ detti\ anche\ punti\ stazionari)$

$se \cos x = 1 : x = 0\ e\ x = 2\pi$ oppure:

$-6\cos^2 x - 2\cos x + 2 = 0$:

$\cos x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} \cong -0.77; x$ è $nel\ primo\ e\ nel\ terzo\ quadrante.$

$x = \arccos(-0.77) \cong 2.4\ rad, \qquad che$ è $un\ valore\ fra\ \ \frac{\pi}{2}\ \ e\ \pi$

$oppure\ x = 2\pi - 2.4 \cong 3.88, che$ è $un\ valore\ compreso\ fra\ \pi\ \ e\ \ \frac{3}{2}\pi$

$\cos x = \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \cong 0.43,$ $\quad x$ *è nel primo e nel quarto quadrante.*

$x = \arccos(0.43) \cong 1.2\, rad,$ $\quad$ *che è un valore compresp fra* 0 *e* $\frac{\pi}{2}$
e $x = 2\pi - 1.2 \cong 5.08\, rad$ *che è un valore compreso che è un valore fra* $\frac{3}{2}\pi$ *e* 2π .

Quindi abbiamo dei punti a tangente orizzontale quando:

$x = 0, x = \arccos(0.43) \cong 1.2 = \alpha\, , x = \arccos(-0.77) \cong 2.4\, rad = \beta,$

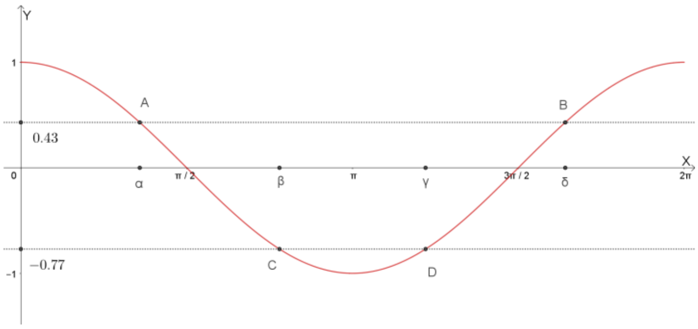
$x \cong 3.88 = \gamma,\ x \cong 5.08 = \delta\ e\ x = 2\pi$.

$f'(x) = (\cos x - 1)(-6\cos^2 x - 2\cos x + 2) \geq 0,\ se\ -6\cos^2 x - 2\cos x + 2 \leq 0$,

essendo $\cos x - 1 \leq 0$ *per ogni* x.

$-6\cos^2 x - 2\cos x + 2 \leq 0, se\ \ 3\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$:

$\cos x \leq \frac{-1-\sqrt{13}}{6}\ \ vel\ \ \cos x \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{6}:\ \beta \leq x \leq \gamma\ ,\ 0 \leq x \leq \alpha\ ,\ \delta \leq x \leq 2\pi$



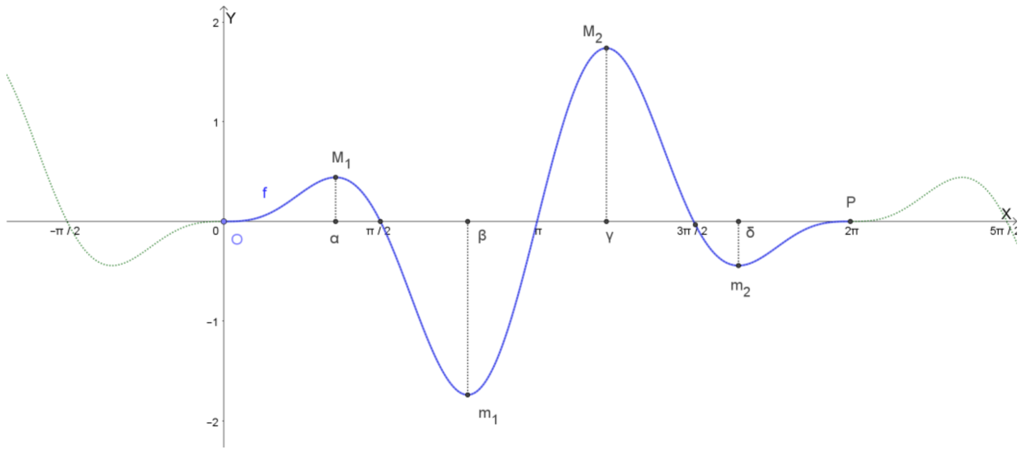
Il grafico risulta crescente per $0 < x < \alpha,\ \beta < x < \gamma,\ \delta < x < 2\pi$.

Il grafico risulta decrescente nella parte rimanente del dominio.

Punti di minimo relativo: $x = 0, x = \beta, x = \delta$.

Punti di massimo relativo: $x = \alpha, x = \gamma, x = 2\pi$.

Diamo un grafico qualitativo della funzione, trascurando lo studio della derivata seconda (avremo almeno un flesso fra 0 *ed* α, *uno fra* α *e* β, *uno fra* β *e* γ, *uno fra* γ *e* δ *ed uno fra* δ *e* 2π)



Determinare per quale valore dell'angolo $\hat{BAC}$ *= x la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD risulta massima.*

Siccome $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD risulta massima per

$$x = \alpha\ , con\ \ \alpha = arccos\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right) \cong 1.2\ .$$

c) *Calcolare infine l'area delimitata dalla funzione f(x) e dall'asse delle ascisse nell'intervallo [0, π/2].*

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x\,(1-\cos x))\,dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int (\sin 2x\,(1-\cos x))\,dx = 2\int \sin x \cos x\,(1-\cos x)\,dx$$

Ponendo $cosx = t$ si ha: $-\sin x\,dx = dt$, quindi:

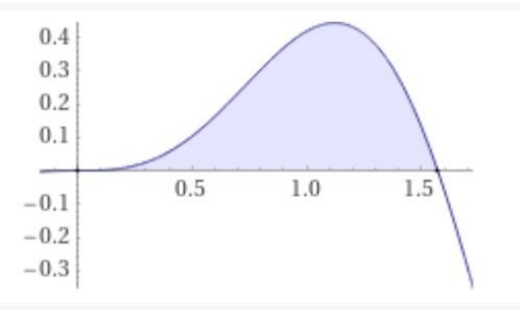
$$2\int -t(1-t)\,dt = -2\int (t-t^2)\,dt = -2\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right) + c = -t^2 + \frac{2}{3}t^3 + c$$

Se $x = 0, t = 1;\;\; se\ x = \frac{\pi}{2}\,, t = 0$. Quindi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x\,(1-\cos x))\,dx = \left[-t^2 + \frac{2}{3}t^3\right]_1^0 = 0 - \left(-1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Quindi l'area richiesta è:

$$Area = \frac{1}{3}\,u^2 \cong 0.33\,u^2$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria