SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI APRILE 2002

E' sufficiente provare che per ogni coppia di numeri positivi x e y si ha:

(I) $$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{y}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8xy}}\geq 1$$

infatti da questo segue che per ogni terna di numeri positivi a, b e c, restano determinati i due numeri positivi:

$$x=\frac{a^2}{bc} \qquad \text{e} \qquad y=\frac{b^2}{ac}$$

e quindi per la (I) si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8bc}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ac}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ab}{c^2}}}\geq 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

Per dimostrare la (I) mostreremo che la funzione

$f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{y}}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+8xy}}$ ha nell'insieme $D = \{(x,y) \mid x>0 \text{ e } y>0\}$

minimo assoluto: $f(x_0, y_0) = 1$

Nell'insieme aperto D la funzione f(x,y) ha derivate parziali prime e seconde continue. Troviamo i punti estremali, soluzioni in D del sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^{\frac{1}{2}}(x+8)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{4y}{(8xy+1)^{\frac{3}{2}}}=0 \\ \dfrac{4}{y^{\frac{1}{2}}(y+8)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{4x}{(8xy+1)^{\frac{3}{2}}}=0 \end{cases}$$

Che sono: $\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$ e $(1,1)$

Studiamo ora la natura di questi punti mediante il determinante Hessiano:

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{48y^2}{(8xy+1)^{\frac{5}{2}}}-\dfrac{8(x+2)}{x^{\frac{3}{2}}(x+8)^{\frac{5}{2}}} & \dfrac{4(4xy-1)}{(8xy+1)^{\frac{5}{2}}} \\ \dfrac{4(4xy-1)}{(8xy+1)^{\frac{5}{2}}} & \dfrac{48x^2}{(8xy+1)^{\frac{5}{2}}}-\dfrac{8(y+2)}{y^{\frac{3}{2}}(y+8)^{\frac{5}{2}}}\end{vmatrix}$$

Punto $\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$: $H\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)=-\frac{13176688}{2476099}<0$ si tratta di un punto di <u>sella</u> per il quale si ha:

$$f\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)=\frac{3\sqrt{57}}{19}>1$$

Punto $(1,1)$: $H(1,1)=\frac{16}{2187}>0$ e $f''_{xx}(1,1)=\frac{8}{81}>0$ si tratta di un punto di <u>minimo relativo</u> per il quale si ha:

$$f(1,1)=1$$

Resta da verificare cosa succede all'infinito e in prossimità degli assi cartesiani.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{y}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8xy}}=1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{a}}}>1 \qquad \text{per } a>0$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to b}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to b}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{y}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8xy}}=1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{b}}}>1 \qquad \text{per } b>0$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{y}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8xy}}=2>1$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{y}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8xy}}=1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{a}}}>1 \qquad \text{per } a>0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to b}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to b}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{y}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8xy}}=1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{b}}}>1 \qquad \text{per } b>0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{y}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8xy}}=1$$

Siamo finalmente in grado di affermare che 1 è un massimo assoluto della funzione f(x,y).

Nota: nella dimostrazione si è fatto un uso massiccio (!) del programma “Derive 5” e del programma di rappresentazione grafica in 3D “ DPGraph” (consiglio a chi ancora non lo conosce di scaricare la versione demo dal sito www.dpgraph.com). Con questa applicazione è stato realizzato il grafico della funzione z=f(x,y) (in verde) e del piano z=1 (in viola) che trovate di seguito: