PROBLEMA DI DICEMBRE 2004

TEOREMA

L'applicazione trasformata di Fourier $f \to \hat{f}$ da $L^1(R)$ in $C_\infty(R)$ non è suriettiva.

Esiste quindi una funzione g appartenente a $C_\infty(R)$ che non è la trasformata di Fourier di alcuna funzione appartenente a $L^1(R)$.

Dim

Si dimostra che l'applicazione trasformata di Fourier $f \to \hat{f}$ è una funzione lineare iniettiva tra lo spazio di Banach $L^1(R)$ dotato della norma:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| dx$$

e lo spazio di Banach $C_\infty(R)$ dotato della norma:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| x \in R\}$$

Se fosse anche suriettiva per il *teorema dell'applicazione aperta* dovrebbe esistere un $\delta > 0$ tale che per ogni $f \in L^1(R)$

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \geq \delta \|f\|_1$$

Consideriamo le funzioni:

$$f_n = \frac{2\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(n\,x)}{\pi\,x^2}$$

Esse appartengono ad $L^1(R)$ e si può provare che vale:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \infty \qquad \text{(i)}$$

Il calcolo delle trasformate di Fourier delle f_n conduce alle seguenti funzioni:

$$\hat{f}_n = \begin{cases} 0 & x \le -n-1 \\ \dfrac{x+n+1}{\sqrt{2\pi}} & -n-1 < x \le -n+1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} & -n+1 < x \le n-1 \\ \dfrac{-x+n+1}{\sqrt{2\pi}} & n-1 < x \le n+1 \\ 0 & n+1 < x \end{cases}$$

Si verifica banalmente che: $\forall n \in N \quad \left\| \hat{f}_n \right\|_\infty = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}$ (ii)

Per la (i) e la (ii) arriviamo all'assurdo perché, comunque si scelga $\delta > 0$, si troverà sempre un $\underline{n}$ tale che si abbia:

$$\left\| \hat{f}_{\underline{n}} \right\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} < \delta \left\| f_{\underline{n}} \right\|_1$$

Ovviamente tale dimostrazione non è costruttiva perché non fornisce un esempio di funzione g appartenente a $C_\infty(R)$ che non sia la trasformata di Fourier di alcuna funzione appartenente a $L^1(R)$, e non fornisce elementi per una sua ricerca.

Pare che trovare un esempio concreto non sia affatto banale, la mia ricerca finisce qui. Sono tuttavia curioso di conoscere una soluzione all'interessante problema di Dicembre 2004.