

Costruzione geometrica

Inscrivere in un dato cerchio un triangolo i cui lati passino per tre punti dati H, K, L .

Il problema si risolve in modo semplice con i metodi della geometria proiettiva.

Il procedimento che segue vale anche se in luogo del cerchio abbiamo più in generale una conica.

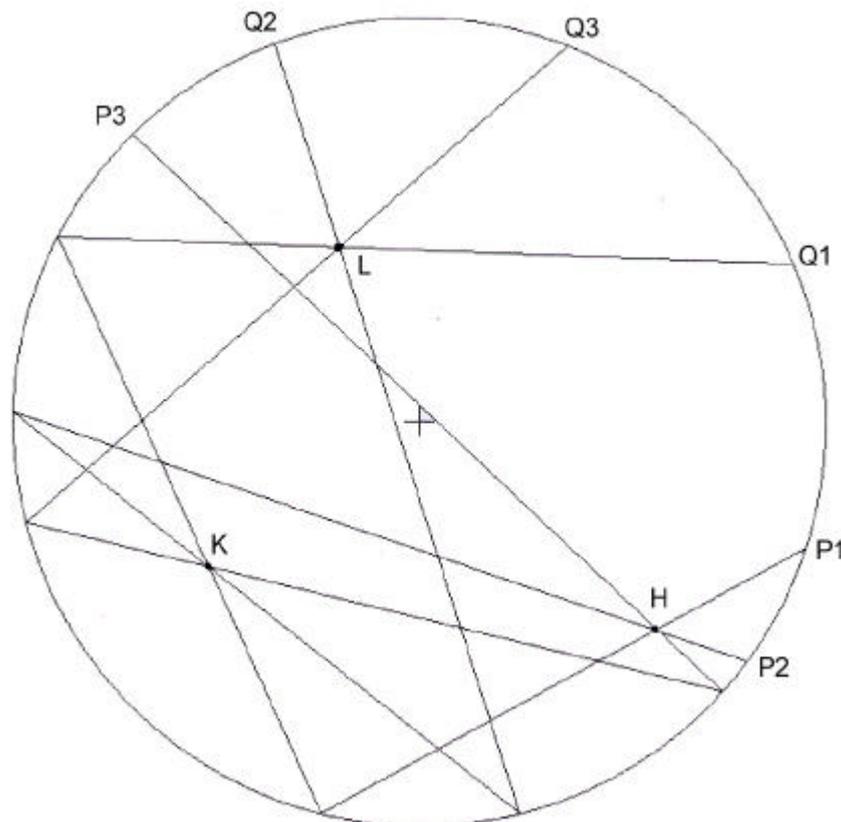
Siano H, K e L i tre punti dati. In figura essi sono interni al cerchio, ma quanto segue vale anche nel caso in cui uno o più dei punti dati siano esterni al cerchio.

Scegliamo a piacere un punto P_1 sul cerchio. Tracciamo la retta congiungente P_1 con H sino a incontrare il cerchio. Da qui tracciamo la retta congiungente con K sino a incontrare il cerchio e da qui tracciamo la retta congiungente con L sino a incontrare il cerchio in Q_1 .

Q_1 sarà in genere distinto da P_1 (se fosse per caso coincidente il nostro problema sarebbe già risolto).

Ripetiamo la costruzione di cui sopra per altri due punti P_2 e P_3 , sempre scelti a piacere sul cerchio, ottenendo i punti Q_2 e Q_3 .

La corrispondenza tra i punti P_1 e Q_1 , P_2 e Q_2 , P_3 e Q_3 creata sul cerchio, è una **proiettività** in quanto ottenuta mediante applicazione successiva di proiezioni con centri H, K e L . I **punti uniti** di tale proiettività, cioè i punti corrispondenti di se stessi, se esistono, risolvono il problema posto.



Tracciamo le rette P_1-Q_2 e P_2-Q_1 (in blu), P_3-Q_1 e P_1-Q_3 (in verde), P_3-Q_2 e P_2-Q_1 (in rosso) (vedi figura seguente, in cui per semplicità sono state omesse le rette che precedentemente hanno portato a costruire Q_1 , Q_2 e Q_3).

Per il teorema di Pascal i punti di incontro X , Y e Z sono allineati sulla retta r (retta di Pascal). Le intersezioni A e A' di questa retta con il cerchio sono i punti uniti della proiettività.

Il triangolo cercato è ABC che si ottiene tracciando la retta tra A e K sino a incontrare il cerchio in B , tracciando la retta tra B e L sino ad incontrare il cerchio in C e infine tracciando la retta tra C e L sino a incontrare di nuovo il cerchio in A . Analogamente anche il triangolo $A'B'C'$ soddisfa il problema.

Si hanno quindi, a seconda della posizione della retta di Pascal rispetto al cerchio:

- ✗ due soluzioni se è secante (come nel caso esaminato)
- ✗ una soluzione se è tangente
- ✗ nessuna soluzione se è esterna

