PROBLEMA GENNAIO 2004- Alex Paci

***

Si consideri la seguente successione:

$$a_n = \begin{cases} 1 & se\ n = 1 \\ a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & se\ n > 1 \end{cases}$$

Verificare che a(100)>14 e dimostrare che la successione è illimitata.

***

Si dimostra che $a_n > \sqrt{2(n-1)}$ [(*)].

La dimostrazione può essere condotta per induzione.

$a_1 = 1 > 0$
e
$a_n > \sqrt{2(n-1)} \Rightarrow a_{n+1} > \sqrt{2n}$

infatti:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_n} > \frac{2(n-1)+1}{\sqrt{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{4n^2 - 4n + 1}{2n-2}} = \sqrt{2n + \frac{1}{2n-2}} > \sqrt{2n}$$

essendo la prima diseguaglianza valida poiché, per n>1, risulta $a_n > 1$ e $\sqrt{2(n-1)} > 1$.

Pertanto:

$a_{100} > \sqrt{198} \cong 14{,}07$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2(n-1)} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} a_n = \infty$

[(*)] per l'individuazione della funzione è sufficiente considerare che per la spezzata a(n) di vertici a_n risulta, per n intero, a'(n)=1/a(n), avendo indicato con a'(n) la derivata destra nel punto di ascissa n.

La classe di funzioni che verifica tale relazione è data da $\sqrt{2(n+c)}$.