GENNAIO 2006

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} & n>1 \end{cases}$$

Dimostrare che

- $a_{100} > 14$
- a_n è illimitata

innanzitutto verifichiamo che a_n sia crescente

$$a_n - a_{n-1} > 0 \qquad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

$$\cancel{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-1}} > 0 \qquad \frac{1}{a_{n-1}} > 0 \quad \text{sempre sse} \quad a_{n-1} > 0 \rightarrow a_n > 0$$

ma $a_1 = 1$ per un andamento crescente $a_n > 0$ $\forall n$

Ora ammettiamo che a_n abbia limite ℓ ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} = \ell$$

$$= \cancel{\ell} + \frac{1}{\ell} = \cancel{\ell} \rightarrow \frac{1}{\ell} = 0 \quad \text{impossibile !!}$$

quindi a_n non ammette limite e quindi

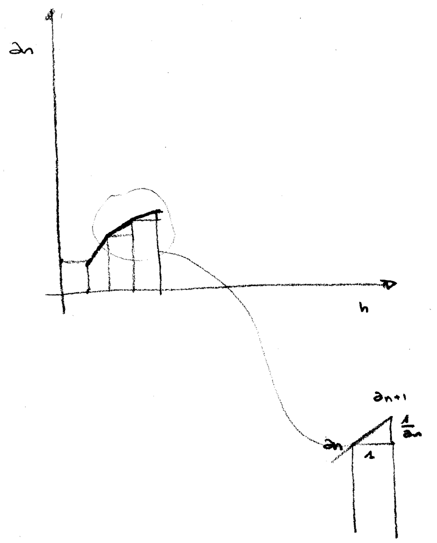
$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ ma essendo strettamente positiva → si esclude quindi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty}$$

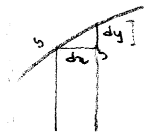
- Dim $a_{100} > 14$

Si può vedere che il termine successivo avrà $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$

cioè dato il termine a_n il successivo è di incremento $\frac{1}{a_n}$ quindi se trovo un un sistema di cui contenerci ottengo che



Ora si immagino che sia una funzione continua alla su x no che



$$y(x+dx) = y(x) + \frac{1}{y(x)}$$

$$y(x) + \frac{dy}{dx} = y(x) + \frac{1}{y(x)}$$

$$y' = \frac{1}{y}$$

se si tratta di risolvere questa equazione differenziale con la condizione al contorno che $y(1) = 1$

quindi il pb

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$y\,dy = dx \overset{\int}{\rightsquigarrow} \frac{y^2}{2} = x + c$$

$$y = \sqrt{2x + c}$$

$$y(1) = \sqrt{2 + c} = 1$$

$$c = -1$$

quindi $y = \sqrt{2x - 1}$

quindi la funzione continua è

$$f(x) = \sqrt{2x-1}$$

ora provo con b_n la successione

$$b_n = \sqrt{2n-1}$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n} = \overset{b_n}{\sqrt{2n-1}} + \overset{\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}} = \overset{b_{n+1}}{\sqrt{2(n+1)-1}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2n-1+1}{\sqrt{2n-1}} = \sqrt{2n+1}$$

$$2n = \sqrt{4n^2-1}$$

$$\downarrow$$

$\cancel{4n^2} = \cancel{4n^2} - 1 \Rightarrow -1 = 0$ quindi b_n non soddisfa alla ricorrenza di a_n

ora voglio dimostrare che

$a_n > b_n$ per $\forall n > 1$

vediamo che per

$n=1$ $\quad a_1 = 1$
$\quad b_1 = \sqrt{2-1} = 1$

$n=2$ $\quad a_2 = 2$
$\quad b_2 = \sqrt{3}$ $\quad a_2 > b_2$

ora ammettiamo che esiste k tale che

$a_k = b_k = \ell$

$b_k = \sqrt{2k-1} = \ell \quad \rightarrow \quad b_{k+1} = \sqrt{2k+1}$

$a_k = \sqrt{2k-1} \quad \rightarrow \quad a_{k+1} = \sqrt{2k-1} + \frac{1}{\sqrt{2k-1}} = \frac{2k}{\sqrt{2k-1}}$

proviamo che $a_{k+1} > b_{k+1}$

$$a_{k+1} - b_{k+1} = \frac{2k}{\sqrt{2k-1}} - \sqrt{2k+1} > 0$$

$$\frac{2k}{\sqrt{2k-1}} > \sqrt{2k+1}$$

$2k > \sqrt{4k^2-1} \quad \rightarrow \quad \cancel{4k^2} > \cancel{4k^2} - 1$

$0 > 1 \quad \forall k \in R$

quindi se $\forall k$ $a_{k+1} > b_{k+1}$ allora è vero che $\forall n$ $a_n > b_n$

Vediamo ora

$$b_{100} = \sqrt{2 \cdot 100 - 1} = \sqrt{199} = 14.10 > 14$$

$$\boxed{a_{100} > b_{100} > 14}$$