Successione illimitata ...

Si consideri la seguente successione

$$a_n = \begin{cases} 1 & se\ n = 1 \\ a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & se\ n > 1 \end{cases}$$

Verificare che ***a_{100}>14*** *e dimostrare che* ***la successione è illimitata***

La relazione che lega a_{n+1} a a_n può essere scritta come equazione alle differenze finite

$$(1) \qquad \frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta n} = \frac{1}{a_n} \quad \text{con} \quad \Delta n = 1$$

Consideriamo l'equazione differenziale, equivalente nel continuo alla (1)

$$(2) \qquad \frac{df(n)}{dn} = \frac{1}{f(n)}$$

la cui soluzione generale è

$$(3) \qquad f(n) = \sqrt{2n + C}$$

Osserviamo che a_1 =1 e a_2= 1+1/1=2. Se vogliamo che sia f(2) = a_2 deve essere C = 0 e quindi

$$(4) \qquad f(n) = \sqrt{2n}$$

Dimostriamo che f(n) approssima l'andamento della successione a_n per valori interi di n > 2 e che è sempre $a_n > f(n)$.

Al crescere di n infatti la legge di variazione di f(n) per valori interi di n tende a coincidere asintoticamente con la legge di variazione di a_n.. Come si ottiene con passaggi elementari

$$(5) \qquad \frac{\Delta f(n)}{\Delta n} = \frac{\sqrt{2(n+1)} - \sqrt{2n}}{\Delta n} \cong \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{4\sqrt{2n^3}}$$

e il termine indicato in rosso tende a zero al crescere di n.

.

Consideriamo ora il segno della differenza tra due termini consecutivi della successione e i corrispondenti valori approssimati forniti dalla (4).

Posto

$$a_n = \sqrt{2n} + \delta_n$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2n+2} + \delta_{n+1}$$

Dovendo essere $$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

(7) $$\sqrt{2n+2} + \delta_{n+1} = \sqrt{2n} + \delta_n + \frac{1}{\sqrt{2n} + \delta_n}$$

dalla quale si ricava con semplici passaggi

(8) $$\delta_{n+1} \cong \delta_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

Al crescere di n $\delta(n)$ cala lentamente ma mantiene <u>lo stesso segno positivo</u>.

Ciò significa che è sempre

$$a_n > \sqrt{2n}$$

Rispondendo ai quesiti posti è quindi:

$$a_{100} > \sqrt{200} = 14{,}1421 > 14$$

e la successione a_n è illimitata, essendo tale la funzione

$$f(n) = \sqrt{2n}$$

La tabella seguente confronta i valori calcolati di a_n con i corrispondenti di f(n):

n	a_n	$\sqrt{2n}$	δ_n
10	4,569884	4,472136	0,097748
10^2	14,213709	14,142136	0,071574
10^3	44,756873	44,721360	0,035514
10^4	141,436659	141,421356	0,015302
10^5	447,219722	447,213595	0,006126
10^6	1414,215907	1414,213562	0,002344
10^7	4472,136825	4472,135955	0,000870
10^8	14142,135940	14142,135924	0,000316