SOLUZIONE MAURIZIO CASTELLAN- PROBLEMA GENNAIO 2004

Si consideri la seguente successione

$$a_n = \begin{cases} 1 & se\ n = 1 \\ a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & se\ n > 1 \end{cases}$$

Verificare che $a_{100} > 14$ e dimostrare che la successione è illimitata.

E' sufficiente provare che per ogni $n \geq 2$ si ha: $a_n \geq \sqrt{2n}$.

PROP 1

Per ogni $n \geq 2$ si ha: $a_n \geq \sqrt{2n}$.

Dim (per induzione)

i) $n = 2$: si ha: $a_2 = a_1 + \dfrac{1}{a_1} = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$.

ii) $n - 1 \Rightarrow n$: per ipotesi induttiva si ha per ogni $n \geq 3$: $a_{n-1} \geq \sqrt{2(n-1)}$, da cui: $a_{n-1}^{\ 2} \geq 2(n-1)$.

Ne segue che:

$$a_n^2 = \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)^2 = a_{n-1}^{\ 2} + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^{\ 2}} = a_{n-1}^{\ 2} + 2 \geq 2(n-1) + 2 = 2n$$

ed essendo per ogni $n \geq 1$: $a_n \geq 0$, possiamo scrivere: $a_n \geq \sqrt{2n}$.

PROP 2

$a_{100} > 14$

Dim

Per la prop. 1 possiamo scrivere:

$$a_{100} \geq \sqrt{2 \cdot 100} = \sqrt{200} > \sqrt{196} = 14$$

PROP 3

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

Dim

Osserviamo che:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{2n} = +\infty \quad ,$$

ma allora avendo stabilito (prop 1) che per ogni $n \geq 2$: $a_n \geq \sqrt{2n}$, per il teorema del confronto tra limiti segue immediatamente che anche per la successione $\{a_n\}$ vale:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty .$$