Soluzione di Rocco Lupoi

Si cosideri la seguente successione

$$a_n = \begin{cases} 1 & se\ n = 1 \\ a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & se\ n > 1 \end{cases}$$

Verificare che **a_{100}>14** e dimostrare che **la successione è illimitata**.

Come si può facilmente verificare per induzione, la successione $\{a_n\}$ è positiva per ogni n.

Da $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$, elevando al quadrato, si ottiene $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \dfrac{1}{a_{n-1}^2}$.

Pertanto, dato che $\dfrac{1}{a_{n-1}^2} > 0$, risulta che $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \dfrac{1}{a_{n-1}^2} > a_{n-1}^2 + 2$.

Essendo $a_1^2 = 1$, si ottiene, per induzione, che $a_n^2 > a_1^2 + 2(n-1) = 2n - 1$.

Da quest'ultima relazione si ricava che la successione è illimitata e, in particolare, che

$$a_{100} > \sqrt{2 * 100 - 1} = \sqrt{199} > \sqrt{196} = 14.$$