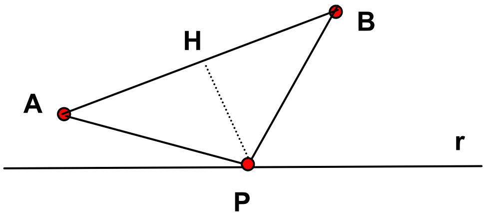
La soluzione di Luigi Bernardini

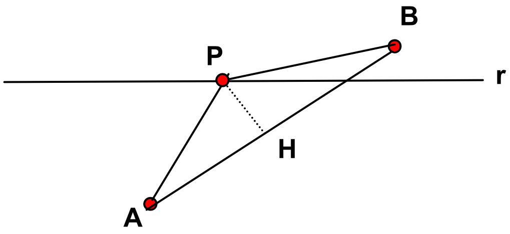
... geometria sintetica

*Trovare per via geometrica un punto P su una data retta r, il quale abbia da due punti dati A e B distanze di somma o differenza **massima o minima**.*
*Dedurre che **tra tutti i triangoli di data area e data base**, l'isoscele ha perimetro minimo.*

A) Differenza minima

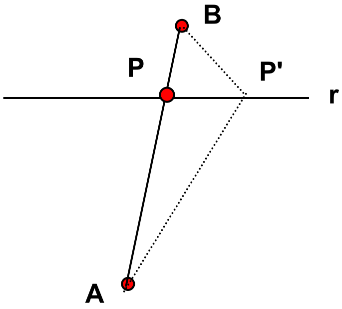
Il minimo della differenza tra le distanze è zero, quando PA = PB
P è dato dall'intersezione tra l'asse di AB e la retta r.
Ciò vale sia se A e B sono dalla stessa parte rispetto a r, sia se sono da parti opposte.

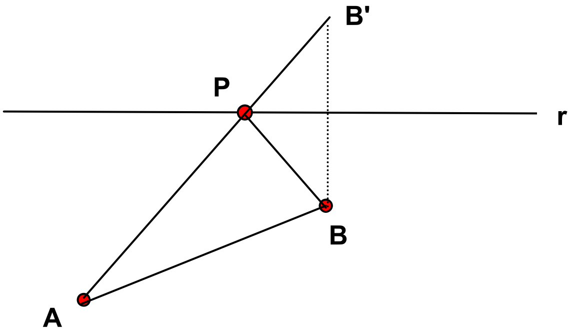




B) Somma minima

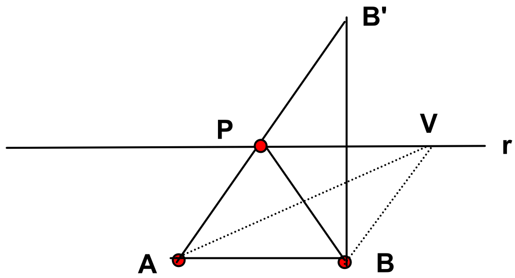
Se A e B sono da parti opposte rispetto alla retta r, P è dato dall'intersezione di AB con r e il minimo della somma delle distanze vale AB. Per qualsiasi P' ≠ P è infatti
P'A + P'B > AB = PA + PB.





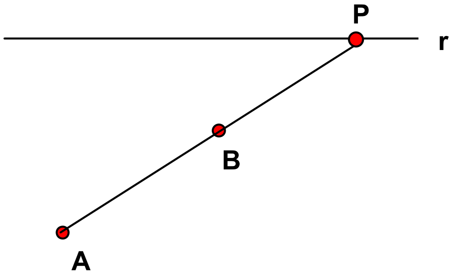
Se A e B sono dalla stessa parte rispetto alla retta r sia B' il simmetrico di B rispetto a r, e P il punto d'incontro tra AB' e la retta r.
P è il punto cui corrisponde il minimo della somma PA + PB' (vedi sopra), ma essendo PB' = PB (Il triangolo PBB' è isoscele) a P corrisponde anche il minimo di PA + PB.
La costruzione è quella ben nota della ricerca del percorso rettilineo minimo che unisce A e B toccando r.

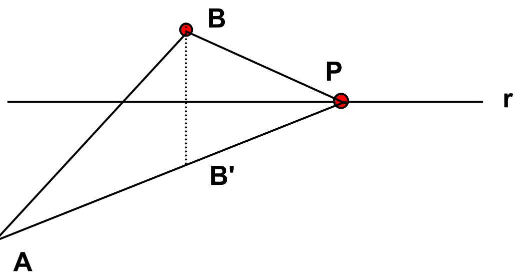
Se AB è parallela a r, il triangolo con base AB e vertice V che scorre sulla retta r ha area costante. Se P è il punto che rende minima la somma PA + PB, il triangolo PAB ha perimetro minimo tra tutti i triangoli VAB. Ma il triangolo PAB è isoscele in quanto gli angoli PAB e PBA sono eguali (complementari degli angoli eguali PBP e PB'B).
Se ne deduce che "tra tutti i triangoli di data area e data base, l'isoscele ha perimetro minimo".



C) Differenza massima

In qualsiasi triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due AB > PA - PB
Il valore massimo che può assumere la differenza delle distanze è perciò AB.





Se A e B sono dalla stessa parte di r P è dato dall'intersezione del prolungamento di AB con r. E' infatti PA - PB = AB che abbiamo visto essere il massimo possibile per la differenza delle distanze.

Se A e B sono da parti opposte di r costruiamo B', simmetrico di B rispetto a r., e sia P il punto d'incontro del prolungamento di AB' con la retta r.
P è il punto cui corrisponde il massimo della differenza PA - PB' (vedi sopra), ma a P corrisponde anche il massimo di PA - PB essendo PB' = PB.
Il massimo della differenza delle distanze vale in questo caso AB'.

D) Somma massima

Il valore massimo della somma PA + PB non è finito in quanto al muoversi di P lungo la retta r verso il suo punto all'infinito la somma PA + PB può superare qualsiasi valore prefissato comunque grande.