... numeri periodici

E' ben noto che una frazione, ridotta i minimi termini, genera un numero decimale periodico quando il suo denominatore contenga almeno un fattore che non sia divisore di una potenza del 10. I fattori 2 e 5 eventualmente presenti nel denominatore danno luogo all'antiperiodo. Riferendoci ad una frazione propria (numeratore maggiore del denominatore) ridotta ai minimi termini, il cui denominatore non contenga né il 2 né il 5, si chiede di computare il numero delle cifre del periodo del numero decimale generato dalla frazione.

Sia p/q la frazione propria, ridotta ai minimi termini, il cui denominatore q non contenga né il fattore 2 né il fattore 5.

Poiché è noto dalla teoria dei numeri che la lunghezza n del periodo di un numero decimale generato da una frazione dipende soltanto dal denominatore q, assumeremo senza perdita di generalità che sia p=1

Sia $A/10^n$, con A intero < 10^n, il valore numerico del periodo generato dalla frazione 1/q : è allora

(1) $$\frac{1}{q}=\frac{A}{10^n}+\frac{A}{10^{2n}}+\frac{A}{10^{3n}}+....=\frac{A}{10^n-1}$$

(2) $$\frac{Aq}{10^n-1}=1$$

e quindi q deve essere un divisore si 10^n-1.

Il numero delle cifre del periodo del numero decimale generato dalla frazione 1/q è quindi il più piccolo valore di n per cui 10^n-1 ha q come divisore.
La determinazione del periodo, concettualmente molto semplice, è laboriosa in pratica richiedendo la scomposizione in fattori primi di numeri molto grandi non appena n supera le poche unità.

Riportiamo di seguito la scomposizione in fattori primi di 10^n-1 per $n \le 8$

n=1	$10^1-1 = 3^3$
n=2	$10^2-1 = 3^2$ 11
n=3	$10^3-1 = 3^3$ 37
n=4	$10^4-1 = 3^2$ 11 101
n=5	$10^5-1 = 3^2$ 41 271
n=6	$10^6-1 = 3^3$ **7 11** 13 37
n=7	$10^7-1 = 3^2$ 239 4649
n=8	$10^8-1 = 3^2$ 11 73 101 137

Ad esempio per $q = 77 = 7 \cdot 11$ è $n = 6$ in quanto tra i fattori di 10^6-1 compaiono tutti i fattori si q.

Per approfondimenti vedi:

Eric W. Weisstein. "Decimal Expansion." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/DecimalExpansion.html