SOLUZIONE PROBLEMA LUGLIO 2004

Siano p e q due numeri naturali con p<q e tali che MCD(p,q)=1 e MCD(q,10)=1.
L' espansione decimale della frazione $\frac{p}{q}$ è illimitata periodica. La lunghezza del periodo k_0 (che dipende solo dal denominatore ed è minore di esso) si può determinare nel seguente modo:

$$k_0 = \min \{ k : q \text{ divide } 10^k - 1 \}$$

Nell'ambito del problema va ricordato il seguente risultato di Eulero che utilizza la funzione:

$\Phi : \mathrm{IN} \rightarrow \mathrm{IN}$
$n \rightarrow \Phi(n)$ = numero dei numeri naturali minori di n e primi con esso

TEOREMA

Se p e q sono primi tra loro allora la lunghezza del periodo dell'espansione decimale di $\frac{p}{q}$ divide $\Phi(q)$.
Caso particolare: se q è primo la lunghezza del periodo dell'espansione decimale di $\frac{1}{q}$ divide $q-1$.

Non per tutti i numeri primi q (diversi da 2 e da 5) $\frac{1}{q}$ ha periodo q -1 (il massimo consentito):

$\frac{1}{3} = 0{,}6666666\ldots$ lunghezza del periodo 1

$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857142857142857143$ lunghezza del periodo 6

I numeri primi come 7 si dicono “lunghi”. Se si considerano i numeri primi minori di 2000, i lunghi sono all'incirca il 38%.
A tal proposito è stata formulata la seguente congettura.

CONGETTURA DI ARTIN

La percentuale di lunghi vale esattamente:

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{p^2 - p - 1}{p^2 - p}$$