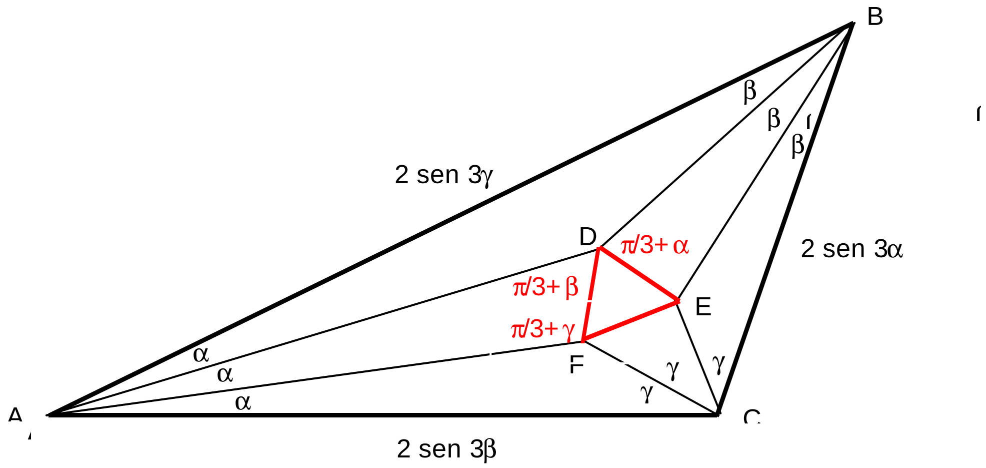
Un triangolo sorprendente ...

Le trisettrici interne degli angoli di un triangolo, adiacenti ad uno stesso lato, si intersecano a due a due nei vertici di un triangolo equilatero.

Siano:

- ABC il triangolo dato
- 3α 3β e 3γ gli angoli opposti rispettivamente ai vertici A,B e C.
- DEF, in rosso, il triangolo che si deve dimostrare essere equilatero

Senza perdita di generalità possiamo assumere che il triangolo ABC sia inscritto in un cerchio di raggio unitario, e quindi i tre lati siano $2\text{sen}3\alpha$, $2\text{sen}3\beta$ e $2\text{sen}3\gamma$



Traccia della dimostrazione:

- nel triangolo AFC: conoscendo il lato AC e gli angoli adiacenti α e γ calcoliamo il lato AF
- nel triangolo ABD: conoscendo il lato AB e gli angoli adiacenti α e β calcoliamo il lato AD
- nel triangolo ADF: conoscendo i due lati AD e AF e l'angolo compreso α calcoliamo gli angoli ADF e AFD e il lato DF

Dal triangolo AFC , per la legge dei seni

(1) $$AF / \text{sen}\gamma = 2\,\text{sen}3\beta / \text{sen}(\angle AFC)$$

$\angle AFC = \pi - \alpha - \gamma$ e essendo $\alpha + \beta + \gamma = \pi / 3$ $\angle AFC = \pi/3 - \beta$ e quindi

(2) $$AF = 2\,\text{sen}3\beta\,\text{sen}\gamma / \text{sen}(\pi/3 - \beta)$$

Poiché è $$\text{sen}3\beta = 4\,\text{sen}\beta\,\text{sen}(\pi / 3 + \beta)\,\text{sen}(\pi / 3 - \beta)$$

sostituendo nella (2) e semplificando

(3) $$AF = 8\,\text{sen}\beta\,\text{sen}(\pi / 3 + \beta)\,\text{sen}\,\gamma$$

Con lo stesso procedimento, dal triangolo ABD ricaviamo

(4) $$AD = 8\,\text{sen}\beta\,\text{sen}(\pi / 3 + \gamma)\,\text{sen}\,\gamma$$

e quindi

(5) $$AF / AD = \text{sen}(\pi / 3 + \beta) / \text{sen}(\pi / 3 + \gamma)$$

Osserviamo ora che è $\alpha + \beta + \gamma = \pi / 3$

che può essere scritta $(\pi / 3 + \beta)+(\pi / 3 + \gamma) + \alpha = \pi$

I valori $\pi / 3 + \beta$, $\pi / 3 + \gamma$ e α hanno per somma π e i primi due, per la (5), soddisfano alla legge dei seni nel triangolo ADF. Essi rappresentano pertanto le ampiezze degli angoli del triangolo ADF:

(6) $$\angle ADF = \pi / 3 + \beta \qquad \angle AFD = \pi / 3 + \gamma$$

Sono indicati in rosso in figura, unitamente all'angolo $\angle BDE = \pi / 3 + \alpha$ ottenibile in modo analogo.

Ancora dal triangolo ADF

(7) $$DF / \text{sen}\alpha = AF / \text{sen}(\pi / 3 + \beta)$$

e sostituendo AF dato dalla (3)

(8) $$DF = 8 \ \text{sen}\alpha \ \text{sen}\beta \ \text{sen}\ \gamma$$

Conclusioni:

Nella (8) α β e γ compaiono in modo simmetrico. La stesso identico risultato si otterrebbe perciò calcolando gli altri due lati DE e EF. Il triangolo DEF è quindi equilatero, **Q.E.D.**

Alla stessa conclusione si giunge considerando la somma degli gli angoli con vertice in D. Essendo

$$\angle ADB = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - (\pi / 3 - \gamma) = 2\pi / 3 + \gamma$$
$$\angle ADF = \pi / 3 + \beta$$
$$\angle BDE = \pi / 3 + \alpha$$

risulta $\angle ADB + \angle ADF + \angle EDB = 5\pi / 3$ e quindi $\angle FDE = \pi / 3$

Analogamente si ottiene $\angle EFD = \angle DEF = \pi / 3$

Il triangolo DEF è quindi equiangolo e dunque equilatero,. **Q.E.D.**

Nota

Il triangolo del problema è noto come "triangolo di Morley", dal nome di chi ne scoprì nel 1899 le "sorprendenti" caratteristiche.

Numerose dimostrazioni che il triangolo sia equilatero sono state pubblicate negli ultimi cento anni.

Le dimostrazioni sono di due tipi:
- quelle "dirette", che partono dagli elementi noti e calcolano i lati (o gli angoli) del triangolo formato dalle intersezioni delle trisettrici, dimostrando che è equilatero
- quelle "a ritroso", che partono da un triangolo equilatero e dimostrano che è determinato dalle intersezione delle trisettrici di un triangolo.

La dimostrazione proposta, del tipo diretto, utilizza in parte passaggi intermedi di due dimostrazioni reperite in Internet. Rispetto a queste presenta il vantaggio di calcolare, senza aumento di complessità, sia gli angoli che i lati del triangolo di Morley.

Sull'argomento segnalo i siti Internet:

http://www.cut-the-knot.com/triangle/Morley/
http://mathworld.wolfram.com/MorleysTriangle.html