SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI MAGGIO 2002

Si tratta del teorema di Morley

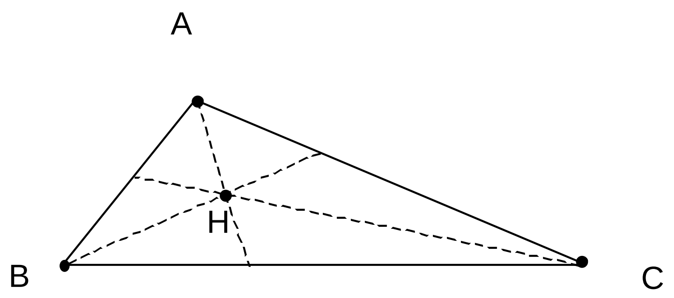
Dimostrazione

Premettiamo il seguente

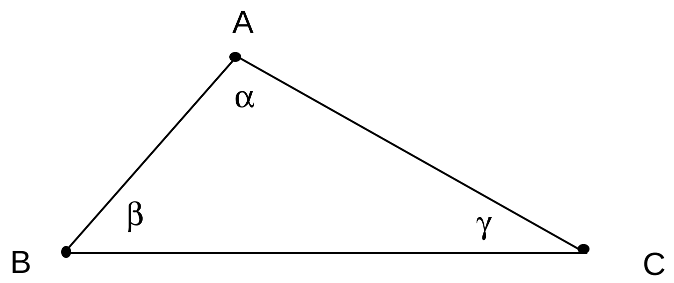
LEMMA

Dato un triangolo ABC consideriamo un punto H interno al triangolo e posto sulla bisettrice dell'angolo in A,

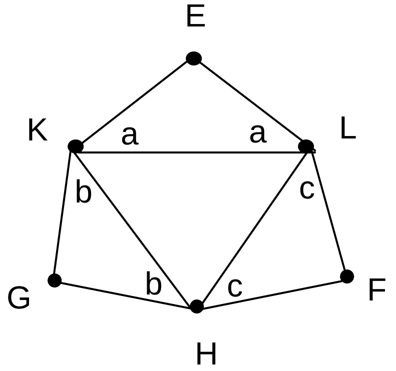
H è l'incentro sse $B\hat{H}C = \frac{B\hat{A}C}{2} + 90°$



Dato ora un triangolo generico ABC ,



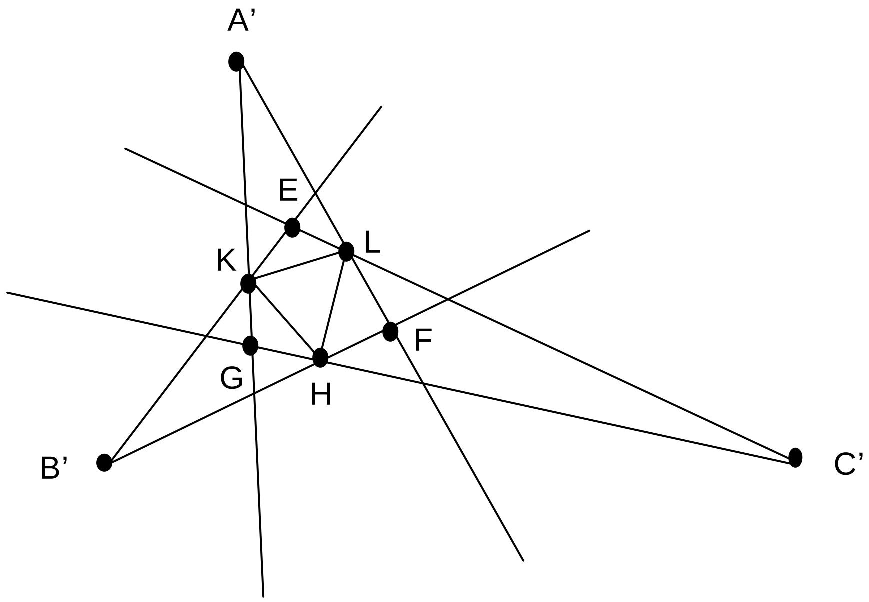
consideriamo un triangolo equilatero HKL. Costruiamo sui suoi lati tre triangoli isosceli EKL, GHK, FHL



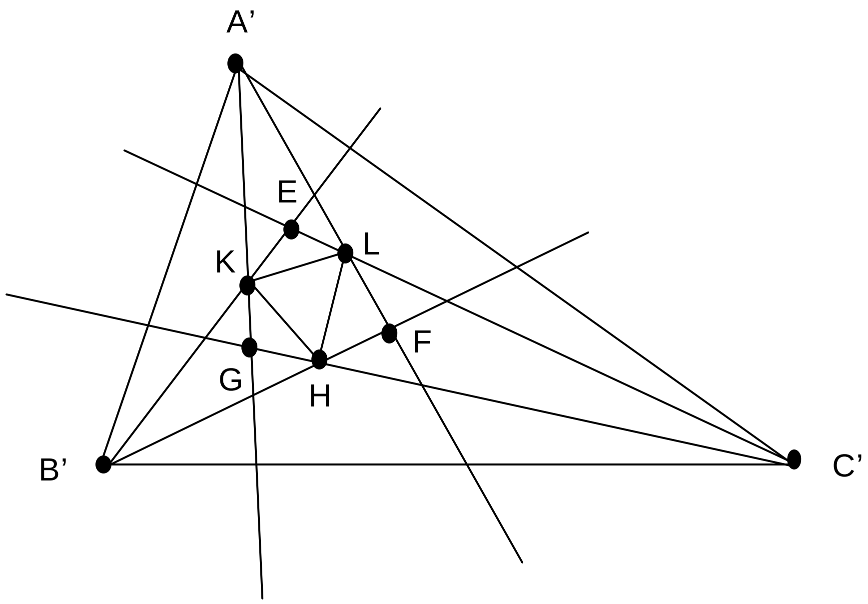
aventi come angoli alla base rispettivamente:

$a = 60^\circ - \frac{\acute{a}}{3}$; $b = 60^\circ - \frac{\beta}{3}$; $c = 60^\circ - \frac{\gamma}{3}$

I prolungamenti a dei lati GK e FL, EK e FH , GH e EL si incontrano rispettivamente nei punti A’, B’ e C’ (la scelta fatta per gli angoli a, b e c ci assicura che tali punti esistano).



Si ottiene così il triangolo A’B’C’



Ora osserviamo che il punto H è situato sulla retta EH che è mediana, altezza e bisettrice del triangolo equilatero HKL e del triangolo isoscele EKL, e quindi bisettrice dell’angolo in E del triangolo B’EC’. Risulta inoltre che:

$$B'\widehat{H}C' = G\widehat{H}F = 60° + b + c = 60° + 120° - \frac{\beta+\gamma}{3} = 180° - \frac{180° - \alpha}{3} = 180° - a = \frac{B'\hat{E}C'}{2} + 90°$$

Per il lemma ne segue che H è l’incentro del triangolo B’EC’.
Analogamente si dimostra che: K è l’incentro del triangolo A’FB’ e L è l’incentro del triangolo A’GC’; e che quindi i prolungamenti a dei lati GK e FL, EK e FH , GH e EL sono le trisettrici del triangolo A’B’C’.

E’ facile mostrare infine che:

$$K\hat{A}'L = 60° - a = \frac{1}{3}\alpha \quad , \quad K\hat{B}'H = 60° - b = \frac{1}{3}\beta \quad , \quad H\hat{C}'L = 60° - c = \frac{1}{3}\gamma$$

I due triangoli ABC e A’B’C’ sono dunque simili, ne segue che sono simili anche i triangoli interni determinati dalle trisettrici e in particolare quello ottenuto dalle intersezioni delle stesse che è dunque equilatero.