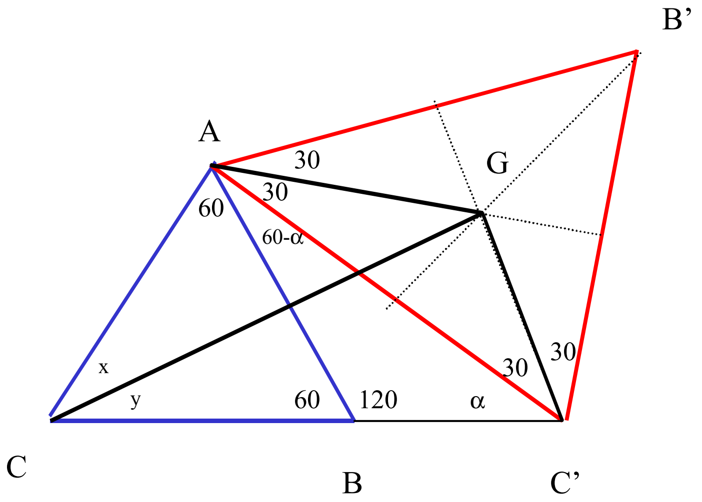
PROBLEMA MAGGIO 2004

***

I triangoli equilateri ABC e AB'C' hanno in comune soltanto il vertice A. Inoltre i punti C, B, C' sono allineati, con B compreso fra gli altri due. Sia G il baricentro del triangolo AB'C'. Dimostrare che CG è la bisettrice dell'angolo ACB.

***



Con riferimento alla figura, indicando con α l'angolo AC'C, con x l'angolo ACG e con y l'angolo BCG, si applichi il teorema dei seni ai due triangoli ACG e CC'G.

Si ha:

$$\frac{AG}{sinx} = \frac{CG}{sin(150-\alpha)}$$

$$\frac{C'G}{siny} = \frac{CG}{sin(30+\alpha)}$$

Ma, essendo AG=C'G (AB'C' equilatero), risulta valere:

$$\frac{CG}{sin(150-\alpha)} sinx = \frac{CG}{sin(30+\alpha)} siny$$

da cui, essendo sin (150-α) = sin (30+α), deve risultare sin x = sin y.
Con x+y=60, x>=0 e y>=0, si conclude che x=y=30, con CG bisettrice di ACB.