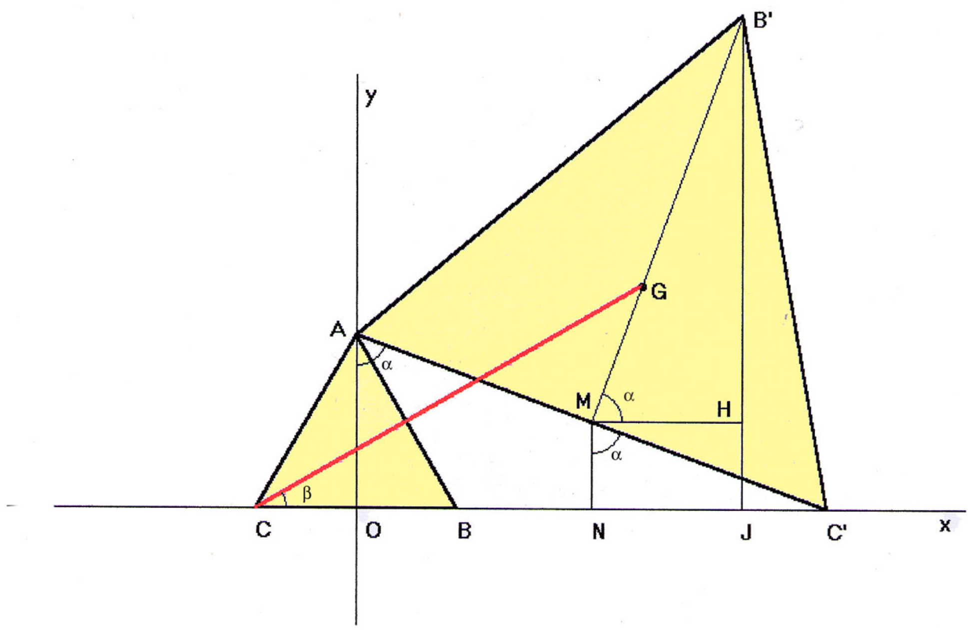
... due triangoli equilateri

I triangoli equilateri ABC e AB'C' hanno in comune soltanto il vertice A. Inoltre i punti C, B, C' sono allineati, con B compreso fra gli altri due. Sia G il baricentro del triangolo AB'C'. Dimostrare che CG è la bisettrice dell'angolo ACB.

Tracciati i due triangoli nella configurazione richiesta, stabiliamo un riferimento cartesiano assumendo come asse delle ascisse la congiungente CB, come asse delle ordinate la perpendicolare da A a CB e come unità di misura la distanza da AO.



Siano:

- k la lunghezza del segmento OC' e α l'angolo OAC'. E' $\alpha = \arctan(k)$, e le coordinate dei vertici C e C' sono rispettivamente $C(-\sqrt{3}/3,0)$ e $C'(k,0)$.
- M il punto medio di AC'
- H il punto d'incontro della parallela all'asse x condotta da M e della parallela all'asse y condotta da B'

Inoltre:

- come si dimostra facilmente i triangoli AOC' MNC' e MHB' sono simili e quindi l'angolo B'MH = α.
- l'angolo AC'B' vale $\pi/3$.

Le coordinate del vertice B' sono

$$X_{B'} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\alpha}\,\text{tang}\frac{\pi}{3}\cos\alpha = \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad Y_{B'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\alpha}\,\text{tang}\frac{\pi}{3}\,\text{sen}\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

Le coordinate del baricentro G sono

(3) $$X_G = \frac{0 + \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + k}{3} = \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \qquad Y_G = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}k + 0}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}k$$

dalle quali si ottiene l'angolo GCB = β

(5) $$\beta = \arctan\left(\frac{Y_G}{x_G + \frac{\sqrt{3}}{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}k}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

β risulta indipendente da k, e quindi la retta CG (in rosso in figura) contiene il baricentro di tutti i triangoli equilateri con un vertice in A e un vertice C' sull'asse delle ascisse.

Essendo il triangolo ABC equilatero e $\beta = \frac{\pi}{6}$, GC è la bisettrice dell'angolo ACB.

c.d.d.