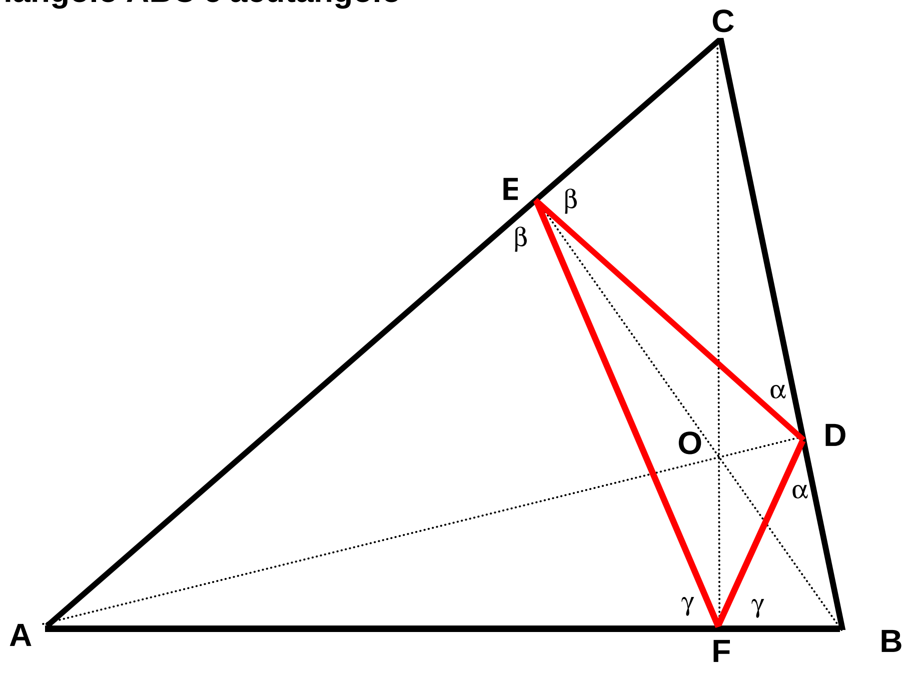
Sul triangolo ortico

Ricordiamo che per triangolo ortico si intende quel triangolo i cui vertici sono i piedi delle altezze di un altro triangolo non rettangolo (se il triangolo è rettangolo il triangolo ortico degenera nell'altezza relativa all'ipotenusa).

Dimostrare che le altezze di un triangolo (non rettangolo) sono bisettrici interne del suo triangolo ortico.

Siano:
ABC il triangolo dato
α , β e γ gli angoli BAC ABC BCA.
a , b e c le lunghezze dei lati opposti ai vertici A, B e C
D, E e F i piedi delle perpendicolari abbassate sui lati opposti da A,B e C.
O l'ortocentro del triangolo ABC
Il triangolo ortico è indicato in rosso.

Caso a) il triangolo ABC è acutangolo



Dimostriamo che I triangoli ECD, FDB e FAE sono simili al triangolo dato ABC.
I triangoli rettangoli ACD e BEC sono simili in quanto hanno in comune l'angolo acuto in C.

$$\frac{EC}{CD} = \frac{AD}{BE} \quad \text{ma è anche , per la legge sulle altezze} \quad \frac{AD}{BE} = \frac{b}{a}$$

e in definitiva $\frac{EC}{CD} = \frac{b}{a}$

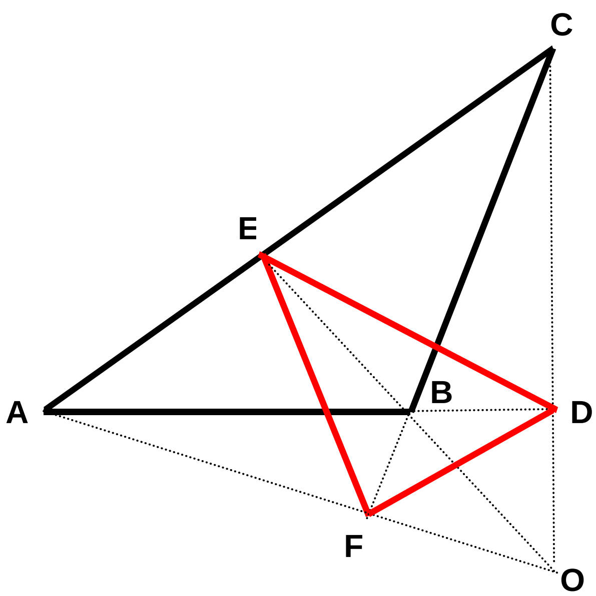
I triangoli EDC e ABC avendo in comune l'angolo γ e i due lati che lo comprendono nello stesso rapporto sono simili. L'angolo EDC vale allora α e l'angolo DEC vale β.

Con procedimento del tutto simile si dimostra che i triangoli FDB e FAE sono simili al triangolo dato ABC.
Gli angoli che i lati del triangolo ortico formano con i lati del triangolo ABC sono pertanto quelli indicati in figura, e le altezze sono le bisettrici interne del triangolo ortico c.d.d.

Gli angoli del triangolo ortico DEF sono $\pi - 2\alpha$, $\pi - 2\beta$ e $\pi - 2\gamma$.

Caso b) Il triangolo ABC è ottusangolo

Questo caso si riconduce al precedente caso a).



Sia ABC il triangolo dato, con angoli al vertice $\alpha < \pi/2$, $\beta > \pi/2$ e $\gamma < \pi/2$
Consideriamo Il triangolo ACO, con vertici nell'ortocentro O e nei due vertici A e C di ABC.
Con semplici considerazioni si ricava che gli angoli al vertice di ACO sono i seguenti:
vertice A = $\pi/2 - \gamma$ vertice C = $\pi/2 - \alpha$ vertice O = $\pi - \beta$

Il triangolo ACO è quindi acutangolo, e per quanto dimostrato nel caso a) le sue altezze sono le bisettrici interne del suo triangolo ortico.

I triangoli ABC e ACO hanno le altezze in comune e il triangolo ortico EFD in comune, e quindi anche le altezza di ABC sono le bisettrici interne del suo triangolo ortico, c.d.d.

Gli angoli del triangolo ortico sono in questo caso 2α $2\beta-\pi$ 2γ

Altre informazioni non richieste dal problema:

Si dimostra facilmente che i lati del triangolo ortico del triangolo acutangolo ABC sono rispettivamente

$EF = a\cos(\alpha)$ $FD = b\cos(\beta)$ $ED = c\cos(\gamma)$

e che se S_t è l'area di ABC, l'area del triangolo ortico S_o è data da

$S_o = S_t\,[1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma)]$

Inoltre:

- il triangolo ortico di un triangolo acutangolo è il triangolo di perimetro minimo inscritto nel triangolo dato
- il triangolo ortico di un triangolo acutangolo rappresenta l'unico "percorso di biliardo" chiuso tracciabile al suo interno
- i lati del triangolo ortico di un triangolo ABC sono paralleli alle tangenti al circocentro di ABC per i vertici A, B e C

Le ultime informazioni sono tratte dai numerosi siti Internet sulla geometria dei triangoli, tra i quali ricordiamo i due seguenti:

http://www.2dcurves.com/line/linet.html
http://www.MathWorld.com