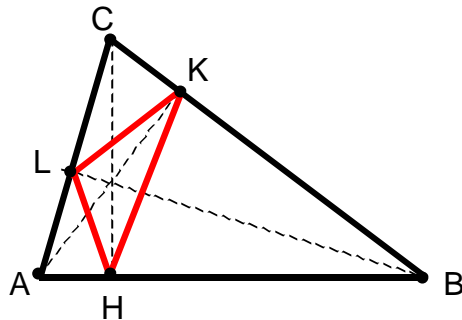


## SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI MARZO 2002

### 1° CASO. ABC ACUTANGOLO.

In un triangolo acutangolo ABC, il triangolo ortico HKL ha come bisettrici le altezze AK, CH e BL.



E' sufficiente mostrare che ad esempio  $\widehat{LHA} = \widehat{KHB}$ , infatti da qui segue che  $\widehat{CHL} = 90^\circ - \widehat{LHA} = 90^\circ - \widehat{KHB} = \widehat{CHK}$ , e quindi CH é bisettrice dell'angolo  $\widehat{H}$  del triangolo ortico.

D'altra parte  $\widehat{LHA}$  e  $\widehat{KHB}$  sono uguali perché entrambi uguali all'angolo  $\widehat{ACB}$ .

Infatti i triangoli ABK e CBH sono simili per il primo criterio di similitudine perché hanno due angoli uguali (e quindi tre):  $\widehat{AKB} = \widehat{CHB} = 90^\circ$  e  $\widehat{ABK} = \widehat{CBH}$ ; ne segue che:

$\frac{AB}{CB} = \frac{KB}{HB}$  da cui  $\frac{AB}{KB} = \frac{CB}{HB}$ , ma allora per il secondo criterio di similitudine sono simili

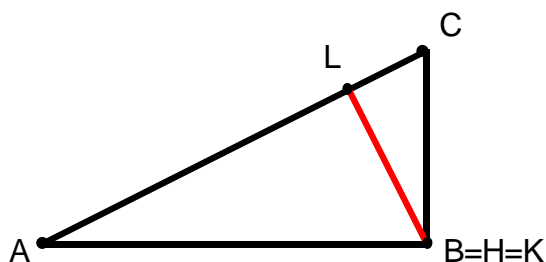
anche i triangoli ABC e HBK (hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso  $\widehat{B}$  in comune). Quindi l'angolo  $\widehat{KHB}$  opposto al lato KB è uguale all'angolo  $\widehat{ACB}$  opposto al lato AB.

In maniera analoga si prova che i triangoli ABC e HAL sono simili e che  $\widehat{LHA}$  è uguale all'angolo  $\widehat{ACB}$ .

Lo stesso ragionamento si applica alle altre due bisettrici AK e BL.

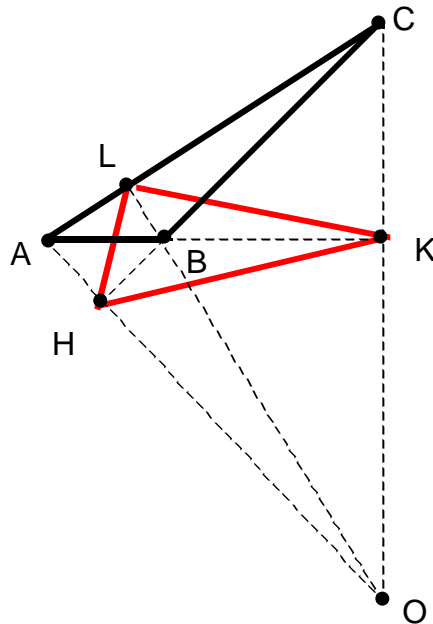
### 2° CASO. ABC RETTANGOLO.

In un triangolo rettangolo ABC, con angolo retto ad esempio in B, il triangolo ortico HKL degenera nell'altezza relativa all'ipotenusa:



3° CASO. ABC OTTUSANGOLO.

In un triangolo ottusangolo ABC, ottuso ad esempio in B, il triangolo ortico HKL ha come bisettrici le rette determinate da AK, CH e OL dove O è l'ortocentro.



Osserviamo intanto che il triangolo ortico HKL di ABC è anche il triangolo ortico di ACO.

Il triangolo ACO è acutangolo, infatti:

$\widehat{CAO} < 90^\circ$  (è un angolo acuto del triangolo rettangolo CAH)

$\widehat{ACO} < 90^\circ$  (è un angolo acuto del triangolo rettangolo ACK)

$\widehat{COA} < 90^\circ$  (è un angolo acuto dei triangoli rettangoli OCH e OAK)

si può quindi applicare ad esso la proposizione già provata per i triangoli acutangoli.

Si giunge alla tesi osservando che le tre altezze del triangolo ACO sono appunto rispettivamente AK, CH e OL.