SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI MARZO 2004

Il problema rientra nell'ambito di studio della ricerca operativa ed è noto come "Bin packing problem" (il problema dei contenitori).

"BIN PACKING PROBLEM"

Si hanno a disposizione un numero N di oggetti di data misura (lunghezza, peso, o qualunque altra cosa) ed un numero infinito (o un qualsiasi numero maggiore di N) di contenitori (bins) di data capacità. Scopo del problema è inserire gli oggetti nel minore numero di contenitori possibile. Naturalmente la capacità dei contenitori deve essere tale da contenere anche il più grande degli oggetti dati..

LA FORMULAZIONE MATEMATICA DEL BIN PACKING PROBLEM È LA SEGUENTE:

Dati:

N oggetti;

w_j volume dell'oggetto j $j = 1, \dots, N$

M contenitori con capacità K

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è inserito nel contenitore } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, M \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, N$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } i \text{ viene utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, M$$

Funzione obiettivo:

$$\min z = \sum_{i=1}^M y_i$$

Vincoli:

$$\sum_{j=1}^N w_j x_{ij} \leq K y_i \quad i = 1, \dots, M$$

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, N$$

$$w_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N$$

$$K \geq 0$$

$$x_{ij} \in \{0;1\} \quad i = 1, \dots, M \quad e \quad j = 1, \dots, N$$

$$y_i \in \{0;1\} \quad i = 1, \dots, M$$

TRADUZIONE DEL PROBLEMA DELLE VERGHE IN BIN PACKING PROBLEM:

- gli oggetti $\Leftrightarrow$ i pezzi
- $N = \sum_{h=1}^k n_h$
- peso dell'oggetto $\Leftrightarrow$ lunghezza del pezzo
- $w_j = l_h$ se il pezzo i ha lunghezza $l_h \quad i=1, \dots, N \quad h=1, \dots, k$
- un contenitore $\Leftrightarrow$ una verga
- capacità di un contenitore $\Leftrightarrow$ lunghezza ($L=600\text{cm}$) di una verga
- un oggetto è inserito in un contenitore $\Leftrightarrow$ un pezzo è ricavato da una verga.

TEOREMA

Il Bin packing problem è NP-arduo

Allo stato dei fatti dobbiamo quindi accontentarci di algoritmi polinomiali approssimati che si avvicinano alla soluzione ottima senza garantirla.

ALCUNI ESEMPI DI ALGORITMI APPROSSIMATI PER IL BIN PACKING PROBLEM

1. First Fit (FF)

Si scelgono gli oggetti da impacchettare in base al loro indice $j= 1, 2, 3, \dots, N$.
Si inserisce l'oggetto j nel contenitore i dove i è il più piccolo indice dei contenitori che hanno ancora spazio per contenere l'oggetto j

2. Best Fit (BF)

Si procede come nell'algoritmo FF, ma il contenitore viene scelto tra quelli che dopo l'introduzione dell'oggetto j avranno il minore spazio libero.

3. First Fit Decreasing (FFD)

Si riordinano gli oggetti in ordine decrescente e si applica l'algoritmo FF.

4. Best Fit Decreasing (BFD)

Si riordinano gli oggetti in ordine decrescente e si applica l'algoritmo BF.

TEOREMA

Le soluzioni generate dagli algoritmi FF o BF usano non più di:

$$\frac{17}{10} \text{OPT} + 2 \text{ contenitori};$$

le soluzioni generate dagli algoritmi FFD o BFD usano non più di:

$$\frac{11}{9} \text{OPT} + 4 \text{ contenitori},$$

dove OPT indica la soluzione ottimale.